حل عددی معادلات جریان پایای لایه مرزی روی یک صفحه ی متحرک و در حضور تشعشع حرارتی به کمک روش Lie group

امین قائمیان[۱]، محسن صادقیان کردآبادی*[۲]، منوچهر فدوی[۱]

۱. مهندسی مکانیک ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
۲. دانشکده مهندسی دریا دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۲۲ تاریخ پذیرش: ۹۶/۳/۱۳
شناسه دیجیتال (DOI) : 10.22113/jmst.2017.47002

چکیده

در مطالعه ی پیش رو به حل معادلات پایای لایه مرزی روی یک صفحه ی متحرک پرداخته شده است. همچنین سعی شده است که در معادله ی انرژی ، مولفه های انتقال حرارت تشعشعی نیز در نظر گرفته شود. روش حل مورد استفاده برای حل معادلات غیر خطی فوق ، روش Lie group می‌باشد. در این روش به کمک یک الگوریتم تکراری شرایط اولیه برای حل معادلات دیفرانسیل با دقت نسبتا خوبی تخمین زده می‌شود. سپس به کمک روش رانگ کوتای مرتبه ی چهارم مقادیر توابع مورد نظر در سراسر محیط حل به دست می‌آید. به کمک نتایج این حل عددی می‌توان لایه مرزی سرعتی و حرارتی را شبیه سازی نموده و تاثیر پارامترهای ضریب تشعشع، نسبت سرعت و ضریب مکش را بر لایه مرزی بررسی کرد. در انتها نیز به منظور ارزیابی نتایج حل عددی به روش Lie group ، از نتایج حل های پیشین به روش شوتینگ استفاده شده است. مقایسه ی حل عددی به روش Lie group و روش شوتینگ نشان می دهد که روش Lie group علاوه بر سرعت بالای همگرایی ، از دقت مناسبی نیز برخوردار است.

واژگان کلیدی: روش لای گروپ، صفحه ی متحرک، معادلات لایه مرزی، تشعشع حرارت

* نویسنده مسئول، پست الکترونیک: sadeghian2@aut.ac.ir

۱. مقدمه

معادلات لایه‌ی مرزی نقشی اساسی در بسیاری از قسمت های مکانیک سیالات دارد چرا که آنها حرکت سیال ویسکوز را در نزدیکی سطح توصیف می‌کنند. در پژوهش پیش رو به حل عددی یک معادله لایه مرزی به روش Lie groupپرداخته شده است. معادله ی لایه مرزی مورد اشاره عبارتست از جریان روی یک صفحه ی متحرک در حضور تشعشع حرارتی. همچنین در ادامه ی مقاله معادلات فوق برای یک نانوسیال خاص نیز حل شده و تاثیر پارامترهای کسر حجمی نانوسیال و همچنین ویژگی های فیزیکی فاز سیال و فاز جامد مورد بررسی قرار گرفته است.Mukho padhyay و همکاران در سال 2011 موفق شدند معادلات پایای جریان جابه‌جایی اجباری روی یک صفحه ی متخلخل را به روش shooting حل کنند(Mukhopadhyay, 2011). در این مقاله معادلات لایه مرزی به کمک تبدیل تشابهی بدون بعد شده اند و در نهایت معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرایط مرزی (BVP) به دست آمده اند. از آنجایی که معادلات فوق به صورت غیر خطی می‌باشند لذا برای حل آنها نیاز به تخمین دقیق شرایط اولیه می‌باشد. برای تخمین شرایط اولیه در معادلات شرایط مرزی روش های متفاوتی ارائه شده است. در مطالعه ی پیش رو برای تخمین شرایط اولیه از روش نوین Lie group استفاده شده است. مزیت این روش دقت بسیار بالای آن و البته سرعت همگرایی آن می‌باشد به همین علت امروزه استفاده از این روش مورد علاقه‌ی پژوهشگران می‌باشد. Cao و همکاران جریان شامل سیال میکروقطبی در یک لوله ی متخلخل را به کمک به روش Lie group آنالیز کردند(2015 ,Cao). آنها برای تعیین پارامترهای تشابهی ، روش Lie group را به کار گرفتند. Abd-el-Malek و Amin موفق شدند به کمک الگوریتم Lie group ، مسئله ی شرایط اولیه ی KdV-KP را به صورت دقیق حل کنند(Abdelmalek,2015). معادله ی KdV-KP یک معادله ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی می‌باشد که در دو بعد مکانی و یک مختصات زمانی تعریف شده و امواج غیر خطی با طول موج بلند و دامنه ی کم را توصیف می‌کند. Uddin و همکاران جریان جابه‌جایی آزاد مگنتو هیدرودینامیک (MHD) شامل سیال میکرو قطبی را روی یک صفحه ی متحرک به روش Lie group آنالیز کردند(Uddin,2015). Liu از روش Lie group برای بهبود منبع حرارتی در مسئله ی Cauchy استفاده نمود(Liu,2014). همچنین وی موفق شد مدل های الاستوپلاستیک و ارتعاشی را بوسیله‌ی روش جبری Lie group تحلیل کند(Liu,2014). در پژوهش دیگری Liu یک استراتژی کنترلی جدید برای سیستم های غیر خطی ارائه نمود و برای این کار از حل جبری Lie group استفاده کرد (Liu,2014). وی در سال 2011 نیز موفق شده بود معادلات لایه مرزی برای سیالات توانی[1]در شرایط مکش ، پاشش و یا جریان معکوس را به روش Lie group حل کند. وی برای ساده سازی معادلات و کاهش مرتبه ی معادلات مرتبه‌ی سوم به معادله ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دوم از تبدیل Crocco استفاده نمود. در نهایت مشاهده شد که روش Lie group برای پیدا کردن شرط اولیه‌ی معادلات مقادیر مرزی (BVP) بسیار کارآمد می باشد چرا که بوسیله‌ی یک تابع وزنی و در یک فرم بسته می‌تواند در تعداد تکرار های کمتری به مقدار مورد نظر همگرا شود (Liu,2011) .

در این مقاله پس از معرفی روش Lie group و تبیین فرم ماتریسی آن ، معادلات لایه مرزی و حرارتی مربوط به یک صفحه ی متحرک و در حضور تشعشع حرارتی بوسیله‌ی این روش حل شده اند. این معادلات شامل دو معادله ی بدون بعد می‌باشد که تبیین کننده ی معادلات پیوستگی، مومنتوم و نیز معادله ی انرژی می باشد. با اعمال شرایط مرزی مناسب و به کمک روش نوین Lie group ، شرط اولیه ی مناسب برای حل عددی با دقت نسبتا خوبی تخمین زده می شود و در نهایت به کمک روش رانگ

[1] Power-law fluids

کوتای مرتبه چهارم (RK4) مقادیر تابع مورد نظر در کل محیط محاسباتی به دست می‌آید (Celledoni,2013). در انتها نیز به منظور اعتبار سنجی نتایج ، حل به دست آمده با نتایج سایر حل های عددی مقایسه شده و خطای حاصل گزارش شده است.

۲. مواد و روش‌ها

جریان جابه‌جایی اجباری روی یک صفحه‌ی تخت در چند قرن اخیر به صورت عددی و آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفته است. توسعه‌ی لایه مرزی سرعتی برای اولین بار توسط بلازیوس صورت پذیرفت (Blasius,1908).در این پژوهش تاثیر تشعشع حرارتی نیز بررسی شده است. اثر تشعشع حرارتی روی جریان های متفاوت از جمله صنعت فضایی و فرآیند های دما بالا ، بسیار زیاد است. در نظر گرفتن تشعشع حرارتی باعث می‌شود که معادله‌ی انرژی کاملا غیر خطی شود. معادلات حاکم برای مسئله‌ی مورد نظر را می توان در قالب معادلات پیوستگی ، مومنتوم و همچنین انرژی بیان کرد. برای این مسئله یک جریان جابه‌جایی اجباری فرض شده است که به صورت دو بعدی و لایه ای بوده و شامل سیالی ویسکوز و غیر قابل تراکم می‌باشد که در روی یک صفحه ی تخت متحرک با سرعت ثابت U_w جریان دارد. بنابراین معادلات حاکم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد(Han,2008).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۲)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{K}{\rho c_P}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_P}\frac{\partial q_r}{\partial y} \quad (۳)$$

در معادلات فوق u و vبه ترتیب مولفه‌ی سرعت در راستای x و y می باشد. μ ویسکوزیته‌ی سیال، ρچگالی سیال و T دمای سیال می باشد. همچنین K ضریب رسانش حرارتی وC_P ظرفیت گرمایی در فشار ثابت می باشد. با وجودلایه ای بودن جریان می‌توان از اتلافات ویسکوز صرف نظر کرد. شرایط مرزی برای معادلات فوق به صورت زیر تعریف می شود:

$$u = U_w\ , v = V_w\ , T = T_w \quad at\ \ y = 0 \quad (۴)$$

$$u \to U_\infty\ \ , T \to T_\infty \quad as\ \ y \to \infty \quad (۵)$$

در این جا V_w سرعت مکش و یا پاشش می‌باشد. به ازای $V_w< 0$شرایط مکش و به ازای $V_w> 0$ شرایط پاشش مدل سازی می‌شود. همچنین T_w دمای دیواره ی سطح متحرک می‌باشد و T_∞ دمای جریان آزاد می‌باشد. لازم به یادآوری است با کمک تقریب Rosseland برای ترم تشعشع می‌توان عبارت $q_r = \frac{-4\sigma}{3k}\frac{\partial T^4}{\partial y}$ را جایگزین نمود. در این رابطه σ ضریب استفان-بولتزمن می‌باشد و k ضریب جذب تشعشعی تعریف شده است.

۲-۱-آنالیز تشابهی

برای ساده سازی معادلات فوق می توان از طریق پارامتر هم شکلی معادلات فوق را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. به کمک تعریف پارامتر های $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$ و همچنین $\eta = y\sqrt{\frac{U}{vx}}$ و با انجام دادن یک سری عملیات ریاضی ، معادلات ODE به دست می‌آیند:

$$\dddot{f} + \frac{1}{2}f\ddot{f} = 0 \quad (۶)$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{Pr}[1 + \frac{4}{3N}\{1 + (\theta_r - 1)\theta\}^3\ ] + \frac{1}{Pr}\frac{4}{N}\{1 + (\theta_r - 1)\theta\}^2(\theta_r - 1)\theta^2 + \frac{1}{2}f\dot{\theta} = 0 \quad (۷)$$

در معادلات فوق $\mathrm{Pr} = \frac{\mu\, c_p}{k}$ عدد پراندتل، $N = \frac{kK^*}{4\sigma T_\infty^3}$ پارامتر تشعشعی و $\theta_r = \frac{T_w}{T_\infty}$ نسبت دمایی متوسط می باشند. در این حالت شرایط مرزی نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{f} = \varepsilon\ , \qquad f = S\ , \qquad \theta = 1 \qquad at\ \eta = 0 \tag{۸}$$

$$\dot{f} \to 1 - \varepsilon\ , \qquad \theta \to 0 \qquad as\ \eta \to \infty \tag{۹}$$

در عبارات فوق $\varepsilon = \frac{U_w}{U}$ ضریب نسبت سرعت و $S = v_0$ ضریب مکش-پاشش می باشد.

۲-۲- استفاده از نانوسیال

یکی از روش های افزایش انتقال حرارت ، استفاده از نانوسیال در محیط متخلخل می‌باشد. در این مطالعه، از مس و اتیلن گلیکول به عنوان سیال استفاده شده است. ارتباط بین پارامترهای نانوسیال از طریق روابط زیر بیان می گردند(Han,2008):

$$(\rho c_P)_{nf} = (1-\varphi)(\rho c_P)_f + \varphi(\rho c_P)_s \tag{۱۰}$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}} \tag{۱۱}$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2\varphi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \varphi(k_f - k_s)} \tag{۱۲}$$

که در آن φ کسر حجمی نانو ذرات ρ_f و ρ_s به ترتیب چگالی سیال و فاز جامد می باشد. μ_{nf} لزجت دینامیکی سیال پایه می‌باشد. k_{nf} هدایت گرمایی نانوسیال k_f و k_s به ترتیب هدایت گرمایی سیال پایه و جامد می باشند. همچنین $(\rho c_P)_{nf}$ ظرفیت گرمایی نانوسیال در فشار ثابت می باشد.

۲-۳- روش Lie group

در روش Lie group می توان به کمک یک الگوریتم تکراری و دقیق ، شرط اولیه نامعلوم را تخمین زد. سپس به کمک شرایط اولیه معادله ی IVP حاصل را به راحتی می توان با روش رانگ کوتای مرتبه‌ی چهارم (RK4) حل کرد. برای معادله‌ی اول که از مرتبه‌ی سوم می‌باشد روش GL(3,R) لای گروپ و برای معادلات دمایی که از مرتبه دوم می‌باشند روش SL(2,R) اتخاذ شده است. برای حل معادله‌ی اول به روش GL(3,R) ابتدا می‌بایست معادله‌ی (۶) به صورت ماتریسی نوشته شود. در این صورت می‌توان نوشت(liu,2013).

$$y_1 = f\ , \qquad y_2 = \dot{f}\ , \qquad y_3 = \ddot{f} \tag{۱۳}$$

لذا می‌توان معادله‌ی مذکور را به صورت زیر تفکیک کرد:

$$\frac{d}{dx} y_1(x) = y_2(x) \qquad y_1(0) = S \tag{۱۴}$$

$$\frac{d}{dx} y_2(x) = y_3(x) \qquad y_2(0) = \varepsilon \tag{۱۵}$$

$$\frac{d}{dx} y_3(x) = \frac{-1}{2} y_1(x)\, y_3(x) \qquad y_3(0) = unknown \tag{۱۶}$$

همان گونه که مشاهده می‌شود یکی از شرایط مرزی وجود ندارد. در روش لای گروپ به کمک یک الگوریتم تکراری این مقدار اولیه با دقت بسیار بالایی تخمین زده می‌شود. می‌توان معادلات (فوق را) به صورت ماتریسی نوشت:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

که در آن

$$c = -\frac{1}{2} y_1(x) \tag{۱۸}$$

در شروع روند تکراری حل مسئله، با انتخاب یک تابع وزنی مانند $r \in [0,1]$ می‌توان کمیت های تصحیح شده‌ی زیر را تعریف کرد:

$$\hat{y}_1 = r\, y_1^0 + (1-r) y_1^f \tag{۱۹}$$

$$\hat{y}_2 = r\, y_2^0 + (1-r) y_2^f \tag{۲۰}$$

$$\hat{y}_3 = r\, y_3^0 + (1-r) y_3^f \tag{۲۱}$$

در معادلات فوق مقادیر y_1^f،y_3^0 و y_3^f مجهول هستند و در گام اول باید فرض اولیه‌ای برای آنها در نظر گرفت. لازم به ذکر است که هدف اصلی لای گروپ یافتن مقدار مناسبی برای پارامتر y_3^0 می‌باشد. همچنین مقادیر معلوم به صورت زیر می‌باشند :

$$y_1^0 = y_1(0) = S \tag{۲۲}$$

$$y_2^0 = y_2(0) = \varepsilon \tag{۲۳}$$

$$y_2^f = y_2(\eta) = 1-\varepsilon \tag{۲۴}$$

یادآوری می‌شود شرط مرزی بینهایت با یک شرط مرزی مشخص در η جایگزین شده است. در عمل مقدار ηرا به اندازه ای بزرگ انتخاب می‌کنیم که در $x=\eta$ شرط مرزی بینهایت برقرار باشد. مقدار η در مسائل شرایط مرزی گوناگون متفاوت خواهد بود.

اکنون می‌توان ماتریس G را به گونه ای تعریف کرد که رابطه ی $y_f = Gy_0$ برقرار باشد. ماتریس G در روش GL(3,R) به صورت زیر تعریف می‌شود (Liu,2013):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \dfrac{\exp(c\eta)}{c^2} - \dfrac{\eta}{c} - \dfrac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{\exp(c\eta)}{c} - \dfrac{1}{c} \\ 0 & 0 & \exp(c\eta) \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

در واقع با اعمال ماتریس G به جواب های جدیدی برای شرایط اولیه‌ی مسئله می‌رسیم. در صورتی که این جواب ها در شرط همگرایی صدق کنند ، با جواب های به دست آمده و روش رانگ کوتای مرتبه چهارم می‌توان تابع f را در محیط حلی مورد نظر نقطه یابی نمود. شرط همگرایی در روش GL(3,R) به صورت زیر می‌باشد:

$$\sqrt{[y_3^0(k+1) - y_3^0(k)]^2 + \left[y_1^f(k+1) - y_1^f(k)\right]^2 + [y_3^f(k+1) - y_3^f(k)]^2} \le \varepsilon \tag{۲۶}$$

همچنین می‌توان برای معادله‌ی انرژی از روش SL(2,R) لای گروپ استفاده کرد. این روش بسیار مشابه روش GL(3,R) می‌باشد با این تفاوت که در این جا ماتریس G به صورت زیر تعریف می‌شود(Liu,2013):

$$G = \begin{bmatrix} \cos(l\sqrt{-c}) & \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\sin(l\sqrt{-c}) \\ -\sqrt{-c}\sin(l\sqrt{-c}) & \cos(l\sqrt{-c}) \end{bmatrix} \quad if\ c < 0 \tag{۲۷}$$

$$G = \begin{bmatrix} \cosh(l\sqrt{c}) & \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sinh(l\sqrt{c}) \\ \sqrt{c}\sinh(l\sqrt{c}) & \cosh(l\sqrt{c}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{if\ c} > 0$$

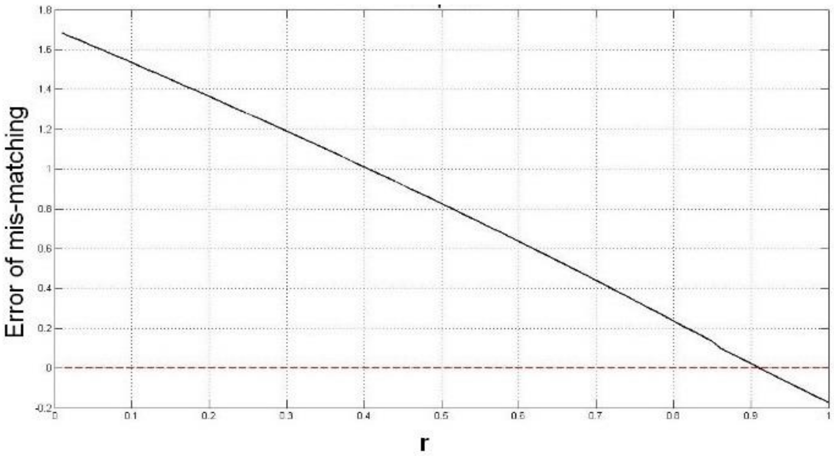
که در آن $l = x_f - x_0$ می‌باشد. همچنین شرط همگرایی در این روش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sqrt{[T_2^0(k+1) - T_2^0(k)]^2 + \left[T_2^f(k+1) - T_2^f(k)\right]^2} \le \varepsilon \tag{۲۸}$$

بنابراین الگوریتم حل معادلات دیفرانسیل فوق به این صورت است که برای یک r مشخص و به کمک رانگ کوتای مرتبه‌ی چهارم و با یک گام مکانی مناسب می‌توان تمام نقاط تابع به دست آورد. نکته اینجاست که می‌بایست پس از اعمال رانگ کوتا شرط مرزی انتهایی نیز بررسی شود. در واقع باید مقدار r به گونه ای باشد که شرط مرزی انتهایی برقرار باشد. برای این امر نمودار خطای شرط انتهایی بر حسب r رسم می‌شود تا به کمک آن بتوان r مناسب را به دست آورد.پس از انتخاب مقداری مناسب برای تابع وزنی ، مقادیر اولیه‌ی مناسب به دست می‌آید و به کمک آن می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل را حل نمود.

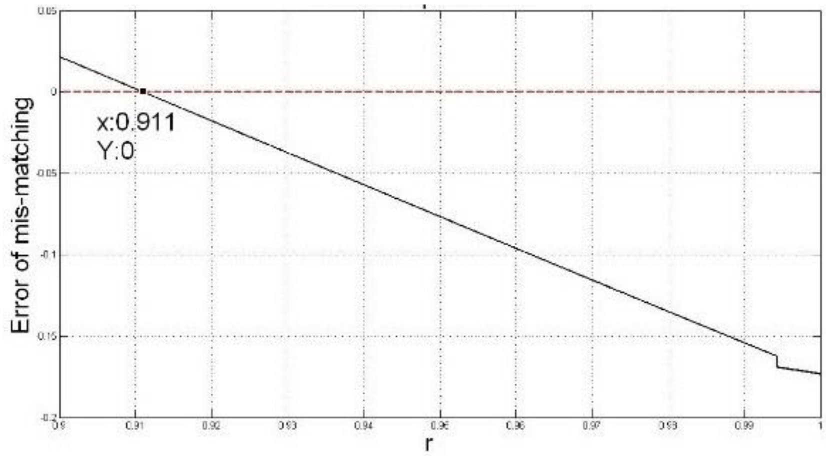
۳. نتایج

برای حل معادله‌ی (۶) همان گونه که گفته شد ابتدا می‌بایست مقدار مناسبی برای r تخمین بزنیم. مقدار r همواره عددی بین صفر و یک می‌باشد.در شکل(۱) نمودار خطای شرط مرزی انتهایی نسبت به تغییرات r در حالت ضریب مکش یک و ضریب سرعت ۰,۲ ترسیم شده است.



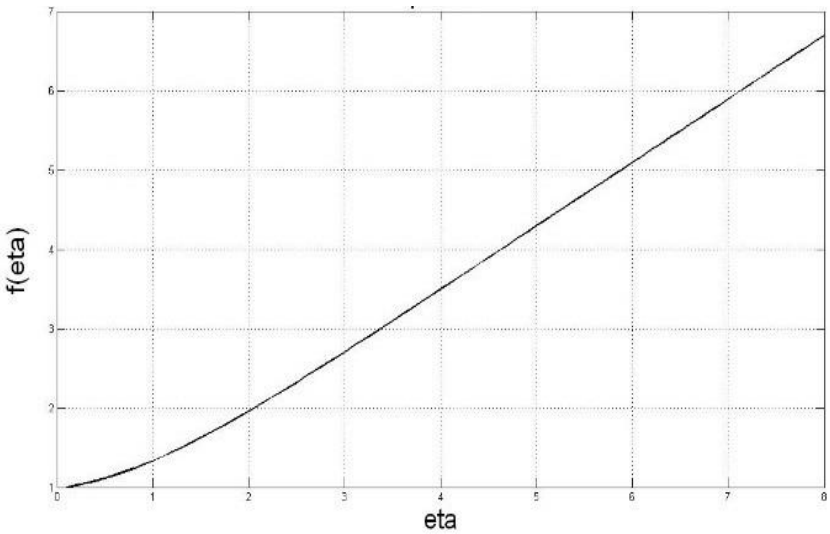
شکل ۱- میزان خطای شرط مرزی انتهایی با تغییر r ‏(S=1 , ε = 0.2)

نمودار فوق نشان می‌دهد که به ازای تابع وزنی در محدوده ی (۱-۰,۹) این مقدار خطا به صفر می‌رسد. به عبارت دیگر در آن صورت شرط اولیه‌ی مناسب مسئله به دست می‌آید. برای یافتن مقدار دقیق r محاسبات را با گام های کوچکتر و در بازه‌ی (۱-۰,۹) تکرار می‌کنیم. نتایج در شکل (۲) ترسیم شده است.



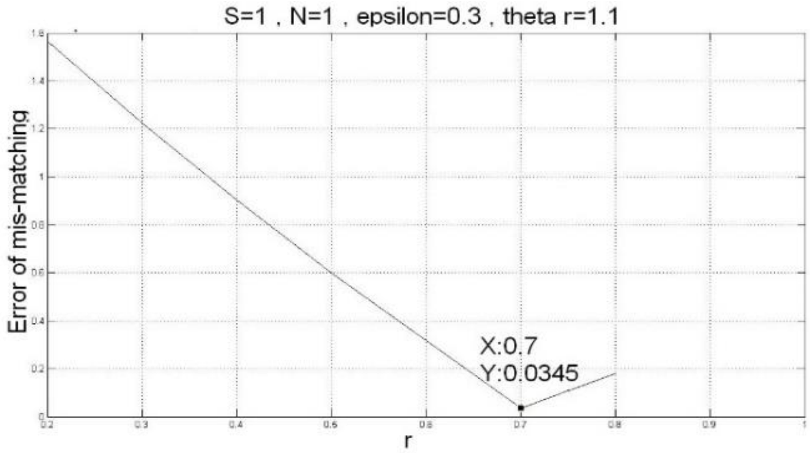
شکل ۲- تخمین مقدار دقیق r به منظور ارضای شرط مرزی نهایی

اکنون به کمک r=0.911 که از روش لای گروپ به دست آمده است می‌توان شرایط اولیه‌ی مناسب را به دست آورده و سپس معادله اول را تحلیل کرد. تابع f(η) در شکل (۳) نمایش داده شده است.



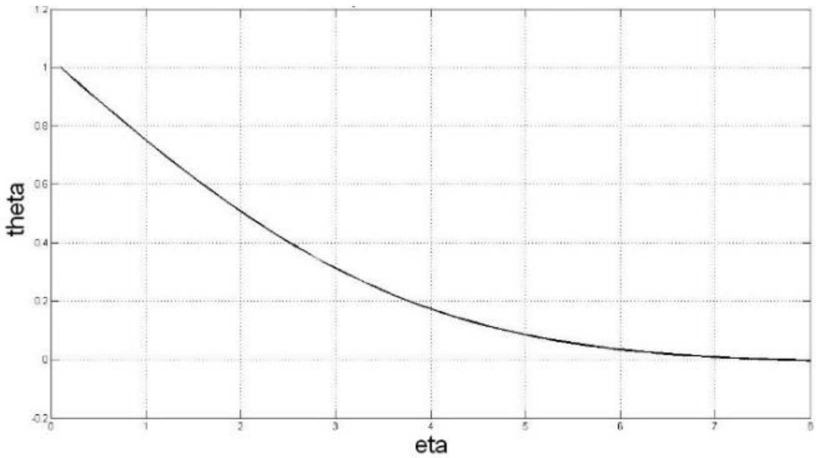
شکل ۳- نمودار تغییرات f به صورت تابعی از η

برای معادله‌ی انرژی نیز می‌توان به همین صورت شرط اولیه‌ی مناسب را به کمک روش Lie group تعیین کرد. در شکل(۴) خطای شرط مرزی پایانی نسبت به تغییرات r رسم شده است.



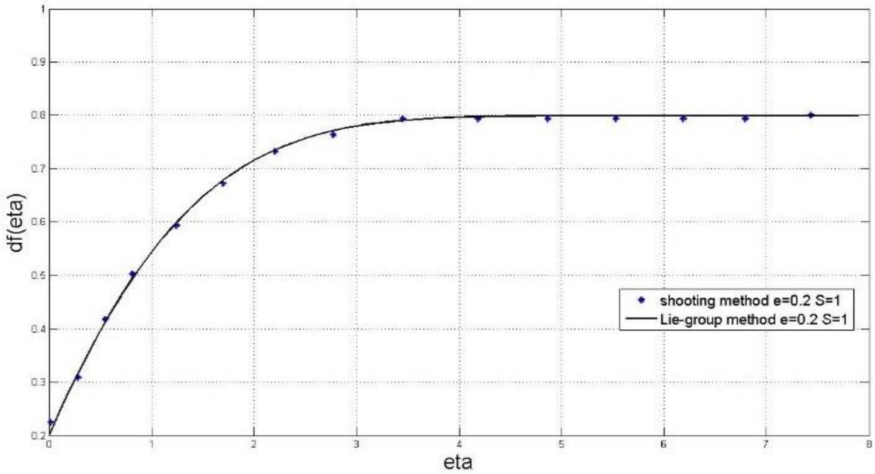
شکل ۴- نمودار خطای شرط مرزی نهایی در معادله انرژی با تغییرات مقدار وزنی

لازم به ذکر است نمودار فوق برای حالت ضریب مکش و ضریب تشعشع ۱ و همچنین نسبت سرعت ۰,۳ و نسبت دمایی ۱,۱ رسم شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود به ازای r=0.7 این مقدار خطا به حداقل خود رسیده است لذا با انتخاب این مقدار برای تابع وزنی می‌توان پروفیل لایه مرزی حرارتی را در این بازه رسم کرد. در شکل(۵) پروفیل لایه مرزی حرارتی به ازای ضریب تشعشع ۱ و نسبت سرعت ۰,۳ ترسیم شده است.



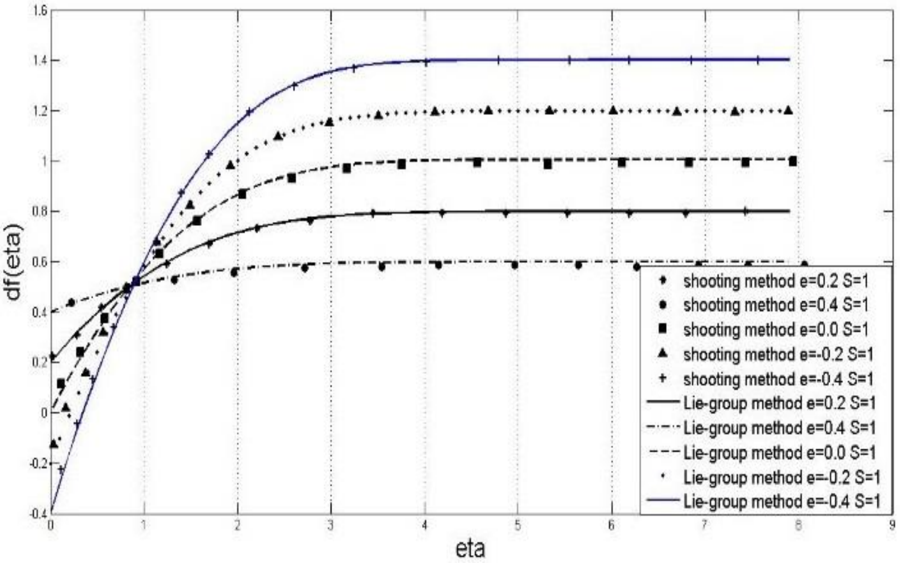
شکل ۵- پروفیل لایه مرزی حرارتی در شرایط N=1 ، S=1 و $\varepsilon = 0.3$

اکنون می‌توان تاثیر پارامترهای مختلف را روی پروفیل سرعت و دما بررسی نمود. همچنین به منظور اعتبار سنجی نتایج ، نمودارهای بدست آمده با نمودارهای Mukho padhyay که با روش شوتینگ معمولی حل شده اند ، مقایسه شده است. در شکل(۶) پروفیل شیب لایه مرزی حرارتی در مسئله‌ی پیش رو به دو روش شوتینگ معمولی و روش Lie group، ترسیم و مقایسه شده‌اند.



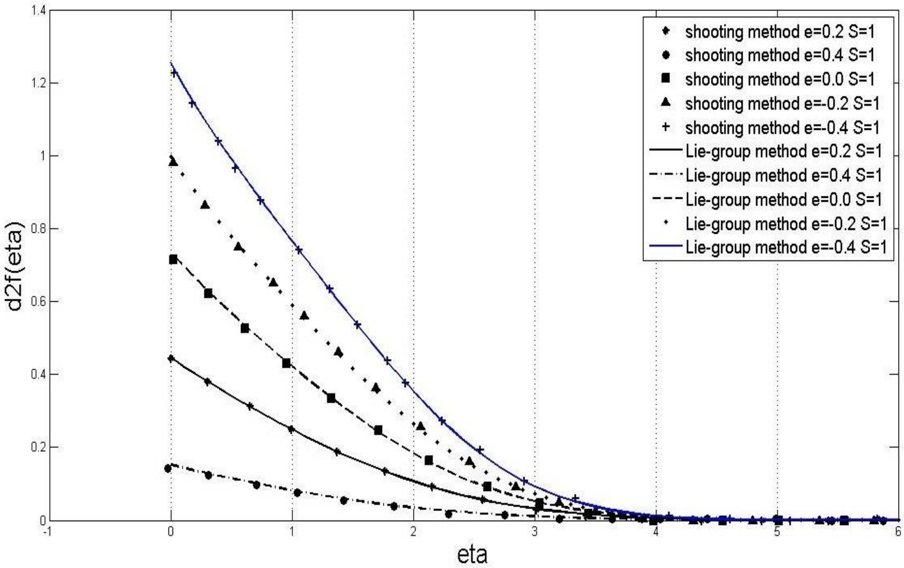
شکل ۶- مقایسه ی روش های شوتینگ و Lie group به کمک بررسی شیب لایه مرزی حرارتی

همچنین در شکل(۷) برای ضریب مکش ثابت و در نسبت سرعت های متفاوت، روش Lie group و شوتینگ مقایسه شده اند. همان گونه که مشاهده می‌شود در نمودار مشتق تابع f نسبت به متغیر η، این دو روش با تقریب نسبتاً خوبی بر هم منطبق می‌باشند.



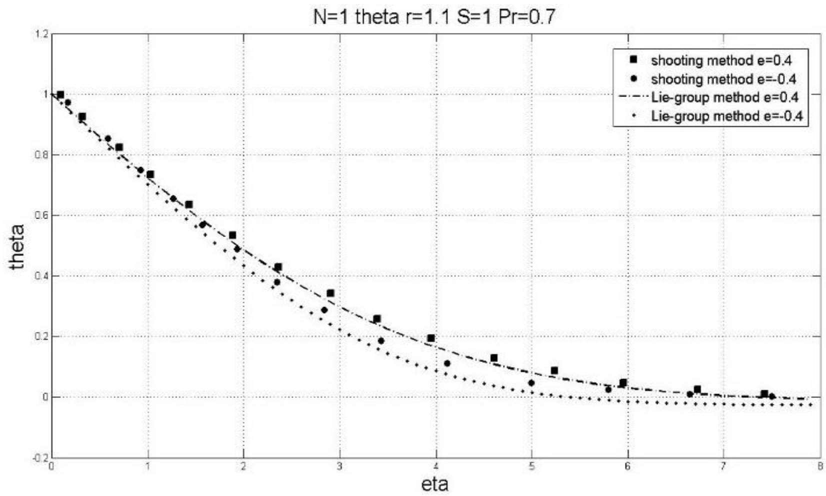
شکل ۷- تاثیر پارامتر نسبت سرعت روی شیب لایه مرزی سرعتی

در شکل (۸) نیز تاثیر نسبت سرعت روی تقعر پروفیل لایه مرزی سرعت بررسی شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود در η های بزرگتر از ۶ این مقدار به سمت صفر میل می‌کند. به عبارت دیگر در این محدوده از η شرط مرزی بینهایت ارضا می‌شود لذا نیازی به گسترش محیط حلی نمی‌باشد.



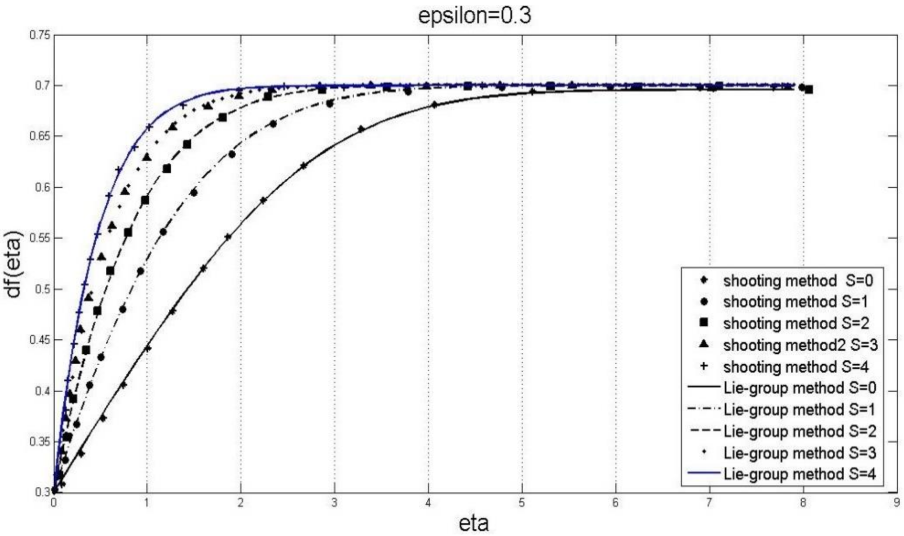
شکل ۸- تاثیر پارامتر نسبت سرعت روی تقعر لایه مرزی سرعتی

در شکل (۹) تاثیر نسبت سرعت روی پروفیل دمایی بررسی شده است. این داده ها در ضریب تشعشع ۱ و نسبت دمایی ۱,۱ بررسی شده اند. همچنین عدد پراندتل برابر ۰,۷ در نظر گرفته شده است.

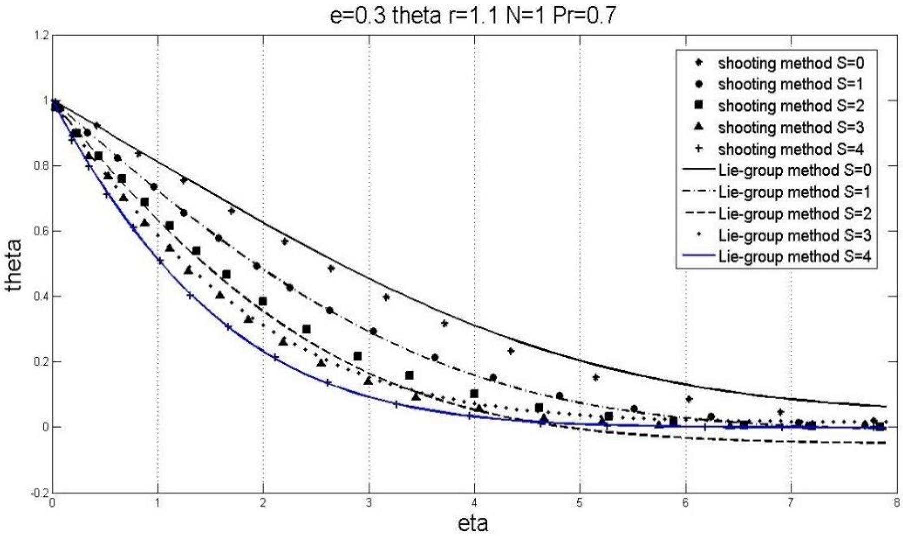


شکل ۹- تاثیر پارامتر نسبت سرعت روی پروفیل لایه مرزی حرارتی

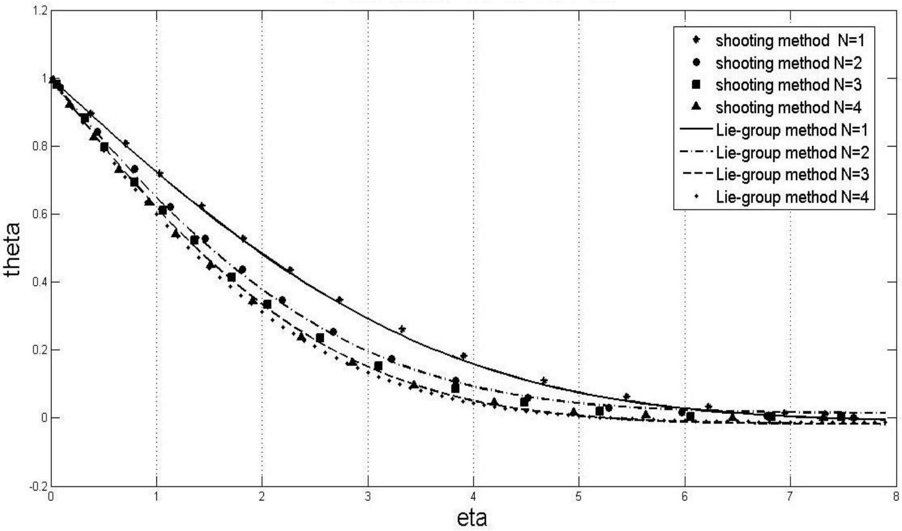
در شکل‌های (۱۲)-(۱۰) سعی شده است تاثیر سایر پارامترهای فیزیکی از جمله ضریب مکش-پاشش و ضریب تشعشع را بر پروفیل سرعت و دمایی در جریان لایه مرزی نمایش داده شود. در عین حال تلاش بر این بوده است که نتایج روش شوتینگ نیز به همراه نتایج روش Lie group گزارش شود. مشاهده می‌شود که روش Lie group مطابقت خوبی با دیگر روش های عددی دارد.



شکل ۱۰- تاثیر ضریب مکش- پاشش روی شیب لایه مرزی سرعتی



شکل ۱۱- تاثیر ضریب مکش-پاشش روی پروفیل لایه مرزی سرعتی



شکل ۱۲- رفتار لایه مرزی حرارتی با تغییرات ضریب تشعشع ($Pr = 0.7$ و $\varepsilon = 0.3$)

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با معرفی روش عددی Lie group ، نحوه‌ی استفاده از آن در یک معادله‌ی لایه مرزی کاربردی بررسی شد. معادله‌ی مذکور عبارتست از معادله‌ی پایای لایه مرزی سرعتی و حرارتی روی یک صفحه‌ی متحرک و در حضور تشعشع حرارتی. در گام اول معادلات حاکم بر مسئله‌ی مورد نظر به کمک آنالیز تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی و بدون بعد تبدیل شد. همان گونه که مشاهده شد با وجود عبارت‌های غیر خطی موجود در معادلات حاکم ، روش Lie group به خوبی می‌تواند شرط مرزی ابتدایی را تخمین بزنند. به کمک این تخمین و استفاده از رانگ کوتای مرتبه چهارم ، مقادیر تابع در کل محیط حلی بدست آمد. به منظور اعتبار سنجی نتایج به دست آمده به روش Lie group از روش شوتینگ استفاده شده است. همچنین تلاش شده است تاثیر پارامترهای مهم فیزیکی از جمله سرعت و انرژی تشعشعی ، بر رفتار لایه مرزی سرعتی و حرارتی بررسی شود. مشاهده شد به ازای افزایش پارامتر سرعت، میزان تقعر پروفیل سرعت لایه مرزی کاهش می‌یابد. همچنین در مقادیر η کوچکتر از یک، افزایش پارامتر سرعت موجب افزایش شیب منحنی پروفیل سرعت می‌شود اما در مقادیر η بزرگتر از یک، شیب منحنی کاهش می‌یابد. در این مطالعه تاثیر ضریب مکش نیز بر رفتار شیب پروفیل سرعت بررسی

شد و در نهایت مشاهده شد در η های کوچک، افزایش ضریب مکش، تقعر منحنی شیب پروفیل سرعت افزایش می‌یابد اما با دور شدن از سطح جسم، این تاثیر به تدریج کاهش می‌یابد. همچنین در این گزارش رفتار لایه مرزی حرارتی نیز بررسی شد. مشاهده شد با افزایش ضریب مکش-پاشش، تقعر پروفیل لایه مرزی حرارتی کاهش می‌یابد. افزایش نسبت تشعشع نیز موجب افزایش تقعر لایه مرزی حرارتی شده است.

در نهایت، این مطالعه نشان داد روش Lie group در مقایسه با سایر روش‌های عددی استفاده شده، سرعت بالاتری برای تخمین شرایط اولیه دارد . در عین حال مقایسه‌ی نتایج Lie group و روش شوتینگ موید این نکته می‌باشد که دقت نتایج این روش نیز بسیار بالا می‌باشد.

منابع

Mukhopadhyay, S., Bhattacharyya, K., Layek, G.C., “Steady boundary layer flow and heat transfer over a porous moving plate in presence of thermal radiation”, International Journal of heat and mass transfer, Vol. 54, pp.2751-2757, 2011

Cao, L., Si, X., Zheng, L., “The flow of a micro polar fluid through a porous expanding channel: A Lie group analysis”, Applied Mathematics and Computation, Vol. 270, pp.242-250, 2015

Abd-el-Malek, M., Amin, A., “New exact solution for solving the initial-value-problem of the KdV-KP equation via the Lie group method”, Applied Mathematics and Computation, Vol. 261, pp.408-418, 2015

Uddin, M.J., Kabir, M.N., Alginahi, Y.M., “Lie group analysis and numerical solution of magnetohydrodynamic free convective slip flow of micro polar fluid over a moving plate with heat transfer”, Computers and Mathematics with Applications, 2015

Liu, Ch., “Lie-group differential algebraic equations method to recover heat source in a Cauchy problem with analytic continuation data”, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 78, pp.538-547, 2014

Liu, Ch., “Elastoplastic models and oscillators solved by a Lie-group differential algebraic equations method”, International Journal of Non-linear Mechanics, 2014

Liu, Ch., “A new sliding control strategy for nonlinear system solved by the Lie-group differential algebraic equation method”, Commun Nonlinear SciNumerSimulat, Vol. 19, pp. 2012-2038, 2014

Liu, Ch., “The Lie-group shooting method for boundary-layer problems with suction/injection/reverse flow conditions for power-law fluids”, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 46, pp. 1001-1008, 2011

Celledoni, E., Marthinsen, H., Owren, B., “An introduction to Lie group integrators-basics, new developments and applications”, Journal of Computational Physics, 2013

Blasius, H., “Grenzschichten in FlussigkeitenmitkleinerReibung”, Z.math.Phys, Vol. 56, pp. 1-37, 1908

Han, Z., “Nanofluids with Enhanced Thermal Transport Properties”, University of Maryland at College Park, 2008

Liu, Ch., “An SL(3,R) shooting method for solving the Falker-Skan boundary layer equation”, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 49, pp. 145-151, 2013

Liu, Ch, “Developing an SL(2,R) Lie-group shooting method for a singular φ-Laplacian in a nonlinear ODE”, Commun Nonlinear SciNumerSimulat, Vol. 18, pp.2327-2339, 2013

Numerical steady stream moving boundary layer on a plate and in the presence of thermal radiation Using Lie group

Amin Ghaemian[1], Mohsen Sadeghian Kerdabadi[2*], Manouchehr Fadavie[1]

1. Mechanical Engineering Amirkabir University of Technology
2. Faculty of Marine Engineering Amirkabir University of Technology

(DOI): 10.22113/jmst.2017.47002

Abstract

In this study ahead on a moving boundary layer equations has been steady. It takes into account the energy equation, heat transfer components also be considered. The solution method used to solve nonlinear equations, the method is Lie group. The initial conditions using an iterative algorithm for solving differential equations with relatively good accuracy estimates. Then, the fourth-order Runge-Kutta method to solve environmental values across functions to be obtained. Using the results of the numerical solution of the boundary layer heating speed and simulate the effects of radiation coefficient, the speed and suction factor to be considered in the boundary layer. Finally, to assess the results of the numerical solution methods Lie group, the results of earlier shooting method is used. A comparison of numerical solution methods and techniques shooting show Lie group Lie group method convergence addition to high speed, good accuracy as well.

Keywords: By Lai Group, the boundary layer equations, thermal radiation

List of figures & tables

* Corresponding author, E-mail: sadeghian2@aut.ac.ir