



Available Online: <http://jmst.kmsu.ac.ir>

Original Article



## Improving the Smoothed Particle Hydrodynamics Method to Simulate the Wave Maker Problem

Hesamoddin Ravanbakhsh<sup>1</sup>, AhmadReza Faghih Khorasani<sup>1\*</sup>, Rouhollah Fatehi<sup>2</sup>

1. Department of Energy Conversion, Faculty of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran.

2. Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Bushehr University, Bushehr, Iran.

\* Corresponding Author Email: [faghih@yazd.ac.ir](mailto:faghih@yazd.ac.ir)

Received: 21 July 2024

Revise Date: 26 August 2024

Accepted: 12 October 2024

DOI: 10.22113/jmst.2024.473084.2608

### ABSTRACT

Improving the accuracy and order of convergence in the smoothed particle hydrodynamics method is still one of the challenges of the researchers. In this research, the first-order convergence scheme for the first spatial derivative in the continuity and conservation equations of linear momentum has been implemented in the DualSPHysics open-source code, in order to increase the accuracy and the order of convergence. By achieving more than three orders of improvement in the accuracy value, after implementing this method to simulate the Taylor-Green vortex benchmark problem in the authors' previous research, in this study, the simulation of the wavemaker benchmark problem by standard solvers and improved and compared with the analytical results through the calculation of the relative error of the velocity values at a certain position of the solution domain have been evaluated. The existence of stationary and moving solid boundary conditions as well as the free surface is one of the main challenges of the new problem. By using the improved solver and adjusting the effective parameters such as artificial viscosity value, density diffusion coefficient, neighborhood radius calculation coefficient and particle displacement coefficient, it is observed that the error reduction process is improved and its first-order convergence is achieved.

**Keywords:** SPH; Accuracy; Convergence; Improved spatial derivative; DualSPHysics.

### INTRODUCTION

Among the studies addressing particle approximation consistency, Taylor series expansion has been employed to correct the smoothing function approximation and its derivatives to enhance convergence rates (Liu and Liu, 2006). The use of a renormalization matrix to correct the gradient of the smoothing function and achieve first-order consistency represents another improvement, particularly for non-uniform particle distributions (Fourtakas et al., 2019; Sun et al., 2019). Among mesh-free methods, SPH has gained attention due to its advances in solving engineering problems (Violeau and Rogers, 2016; Manenti et al., 2019; Amicarelli et al., 2020; Khayyer, Rogers and Zhang, 2022). Nevertheless, significant non-physical pressure oscillations have been observed with this

#### Copyrights:

Copyright for this article is retained by the author(s), with publication rights granted Journal of Marine Science and Technology. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.



method (Gotoh and Khayyer, 2018; Wang et al., 2019). Extensive research is being conducted to enhance its stability, including pressure field consistency (Antuono et al., 2021; You et al., 2021), high-order methods (King et al., 2020; Nasar et al., 2021), spatial anisotropy of particles (Rastelli et al., 2022), and performance improvements (Valdez-Balderas et al., 2013; Park et al., 2020). In the context of WCSPH, methods like Riemann-SPH (Inutsuka, 2002; Gao et al., 2012) and delta-SPH (Marrone et al., 2011; Antuono, Colagrossi and Marrone, 2012; Fourtakas et al., 2019) have been proposed to enhance the accuracy and stability of SPH, particularly to address non-physical pressure oscillations. The delta-SPH method reduces high-frequency numerical oscillations in the pressure field by adding an appropriate numerical dissipation term to the continuity equation. Moreover, efforts have been made to improve its boundary accuracy due to the method's inefficiencies in this regard (Han et al., 2013; Long et al., 2017; Zhang et al., 2018). Fatehi and colleagues (Fatehi et al., 2019) proposed a method using artificial time-stepping and another by adding a compensatory term to the momentum equation to achieve a zero-divergence velocity field. By comparing these with WCSPH for three incompressible problems, they achieved smoother pressure fields with less divergence. Since the conventional SPH method is considered a low-accuracy method, researchers' efforts have led to the development of various modified or improved versions of the SPH particle approximation schemes (Lind, Rogers and Stansby, 2020).

The objective of this research is to employ the gradient correction method for the smoothing function to reduce errors and enhance the convergence of solutions by implementing the differential form of the pressure gradient in the open-source software DualSPHysics. After verifying the improvement in results for the Taylor-Green vortex benchmark problem (Ravanbakhsh, Faghih and Fatehi, 2023), this study proceeds with the simulation of a wave-maker problem, which involves free surface boundary conditions as well as stationary and moving walls. The application of various criteria for free surface detection and the dynamic conditions governing it, along with the calculation of pressure on solid particles, are among the challenges addressed in this paper.

## **MATERIALS AND METHODS**

Various studies have been conducted to determine the suitable term to add to the continuity equation. An expression known as the density diffusion term, given by equation (11), has been used to reduce oscillations in the pressure/density field (Molteni and Colagrossi, 2009). The normalization tensor prevents the appearance of errors in the calculation of spatial derivatives for particles that do not have a uniform distribution around themselves by eliminating lower-order truncation errors (Fatehi and Manzari, 2012). The asymmetric form of equation (17) ensures first-order convergence and significantly reduces the error in the first-order spatial derivative based on particle approximation. To calculate the pressure on the wall, in the absence of shear stress in the fluid, equation (18) is used (Fatehi and Manzari, 2012). Since the normal component of acceleration is taken into account, the no-slip condition is not required, making it applicable for free-slip conditions as well. To detect the free surface, four criteria given in equation (19) are used, and in the code, simultaneous fulfillment of these criteria is used to apply the corresponding boundary conditions. In this problem, a piston-type wave generator on the left side of the solution domain (as shown in Figure (1)) creates a second-order regular wave through its oscillatory motion. The initial condition for the piston speed is zero, and the bottom of the solution domain is considered stationary. On the right side of the domain, to prevent wave reflections, wave damping is applied using equation (23) to absorb the wave energy.

## **RESULTS**

The most important parameters affecting the results are artificial viscosity value, DDT coefficient, neighborhood radius calculation coefficient, particle displacement coefficient, and time step calculation coefficient. Despite the satisfactory graphical results of Figure (2), for the distribution of particles and velocity vectors compared to the standard solver, quantitative evaluation of the results is necessary to calculate the error; Also, to summarize and compare the results, the SS symbol indicating the standard software solver has been introduced. The parameters of Table (3) are determined based on the fact that the simulation run after passing through the initial transient state must continue for 15 seconds or 5 cycles after 5 seconds without divergence to ensure the stability of the solution. Considering that the analytical results of this problem are available (Altomare *et al.*, 2017); Error

evaluation is done by calculating the norm of a relative error based on equation (22), about the value of horizontal and vertical velocities at a point with coordinates (6, 0, 0.4).

## DISCUSSION AND CONCLUSION

In this study, by using the differential discretization method of the gradient operator in the linear momentum conservation equation and using the normalizing matrix in this equation and the divergence operator of the continuity equation, the new wavemaker problem in the open-source software DualSPHysics is similar to was developed and the degree of convergence was improved compared to the standard software method and reached one. However, the challenge of the new problem is the existence of stationary, moving and free surface solid boundaries. Using various criteria for detecting the free surface and determining their values, as well as setting effective parameters is a time-consuming step for simulation convergence.

## REFERENCES

- Altomare, C., Domínguez, J.M., Crespo, A.J.C., González-Cao, J., Suzuki, T., Gómez-Gesteira, M., Troch, P., 2017. Long-crested wave generation and absorption for SPH-based DualSPHysics model. *Coast. Eng.* 127, pp. 37–54. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2017.06.004>
- Amicarelli, A., Manenti, S., Albano, R., Agate, G., Paggi, M., Longoni, L., Mirauda, D., Ziane, L., Viccione, G., Todeschini, S., Sole, A., Baldini, L.M., Brambilla, D., Papini, M., Khellaf, M.C., Tagliaferro, B., Sarno, L., Pirovano, G., 2020. SPHERA v.9.0.0: A Computational Fluid Dynamics research code, based on the Smoothed Particle Hydrodynamics mesh-less method. *Comput. Phys. Commun.* 250, p.107157. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107157>
- Antuono, M., Colagrossi, A., Marrone, S., 2012. Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes. *Comput. Phys. Commun.* 183, pp.2570–2580. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.07.006>
- Antuono, M., Colagrossi, A., Marrone, S., Lugni, C., 2011. Propagation of gravity waves through an SPH scheme with numerical diffusive terms. *Comput. Phys. Commun.* 182, pp.866–877. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.12.012>
- Antuono, M., Sun, P.N., Marrone, S., Colagrossi, A., 2021. The  $\delta$ -ALE-SPH model: An arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the  $\delta$ -SPH model with particle shifting technique. *Comput. Fluids* 216, p.104806. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104806>
- Bonet, J., Lok, T.S.L., 1999. Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 180, pp.97–115. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00051-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00051-1)
- Bouscasse, B., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M., 2013. Nonlinear water wave interaction with floating bodies in SPH. *J. Fluids Struct.* 42, pp.112–129. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.05.010>
- Chen, B.F., Nokes, R., 2005. Time-independent finite difference analysis of fully non-linear and viscous fluid sloshing in a rectangular tank. *J. Comput. Phys.* 209, 47–81. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.006>
- De Chowdhury, S., Sannasiraj, S.A., 2014. Numerical simulation of 2D sloshing waves using SPH with diffusive terms. *Appl. Ocean Res.* 47, pp. 219–240. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2014.06.004>
- Domínguez, J.M., Fourtakas, G., Altomare, C., Canelas, R.B., Tafuni, A., García-Feal, O., Martínez-Estévez, I., Mocos, A., Vacondio, R., Crespo, A.J.C., Rogers, B.D., Stansby, P.K., Gómez-Gesteira, M., 2021. DualSPHysics: from fluid dynamics to multiphysics problems. *Comput. Part. Mech.* 9, pp.867–895. <https://doi.org/10.1007/s40571-021-00404-2>
- Farzin, S., Fatehi, R., Hassanzadeh, Y., 2019. Position explicit and iterative implicit consistent incompressible SPH methods for free surface flow. *Comput. Fluids* 179, pp.52–66. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.10.010>
- Fatehi, R., Manzari, M.T., 2012. A consistent and fast weakly compressible smoothed particle hydrodynamics with a new wall boundary condition. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 68, pp.905–921. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/fld.2586>
- Fatehi, R., Rahmat, A., Tofighi, N., Yildiz, M., Shadloo, M.S., 2019. Density-based smoothed particle hydrodynamics methods for incompressible flows. *Comput. Fluids* 185, pp.22–33. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.02.018>

- Fourtakas, G., Dominguez, J.M., Vacondio, R., Rogers, B.D., 2019. Local uniform stencil (LUST) boundary condition for arbitrary 3-D boundaries in parallel smoothed particle hydrodynamics (SPH) models. *Comput. Fluids* 190, pp.346–361. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.06.009>
- Gao, R., Ren, B., Wang, G., Wang, Y., 2012. Numerical modelling of regular wave slamming on subface of open-piled structures with the corrected SPH method. *Appl. Ocean Res.* 34, pp.173–186. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.08.002>
- Gingold, R.A., Monaghan, J.J., 1982. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 46, pp.429–453. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90025-0)
- Gotoh, H., Khayyer, A., 2018. On the state-of-the-art of particle methods for coastal and ocean engineering. *Coast. Eng. J.* 60, pp.79–103. <https://doi.org/10.1080/21664250.2018.1436243>
- Han, Y.W., Qiang, H.F., Zhao, J.L., Gao, W.R., 2013. A new repulsive model for solid boundary condition in smoothed particle hydrodynamics. *Wuli Xuebao/Acta Phys. Sin.* 62. <https://doi.org/10.7498/aps.62.044702>
- Hashemi, M.R., Fatehi, R., Manzari, M.T., 2012. A modified SPH method for simulating motion of rigid bodies in Newtonian fluid flows. *Int. J. Non. Linear. Mech.* 47, pp.626–638. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.10.007>
- House, D., Keyser, J.C., 2020. Smoothed Particle Hydrodynamics, in: Foundations of Physically Based Modeling and Animation. A K Peters/CRC Press, Boca Raton : Taylor & Francis, a CRC title, part of the, pp. 305–314. <https://doi.org/10.1201/9781315373140-26>
- Inutsuka, S.I., 2002. Reformulation of smoothed particle hydrodynamics with Riemann solver. *J. Comput. Phys.* 179, pp.238–267. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7053>
- Khayyer, A., Rogers, B.D., Zhang, A.M., 2022. Preface: Special Issue on Advances and Applications of SPH in Ocean Engineering. *Appl. Ocean Res.* 118, p.103028. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.103028>
- King, J.R.C., Lind, S.J., Nasar, A.M.A., 2020. High order difference schemes using the local anisotropic basis function method. *J. Comput. Phys.* 415, pp.109549. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109549>
- Lind, S.J., Rogers, B.D., Stansby, P.K., 2020. Review of smoothed particle hydrodynamics: Towards converged Lagrangian flow modelling: Smoothed Particle Hydrodynamics review. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 476. <https://doi.org/10.1098/rspa.2019.0801>
- Liu, M., Shao, J., Chang, J., 2012. On the treatment of solid boundary in smoothed particle hydrodynamics. *Sci. China Technol. Sci.* 55, pp.244–254. <https://doi.org/10.1007/s11431-011-4663-y>
- Liu, M.B., Liu, G.R., 2006. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Appl. Numer. Math.* 56, pp.19–36. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.02.012>
- Long, T., Hu, D., Wan, D., Zhuang, C., Yang, G., 2017. An arbitrary boundary with ghost particles incorporated in coupled FEM–SPH model for FSI problems. *J. Comput. Phys.* 350, pp.166–183. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.08.044>
- Lucy, L.B., 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.* 82, p.1013. <https://doi.org/10.1086/112164>
- Manenti, S., Wang, D., Domínguez, J.M., Li, S., Amicarelli, A., Albano, R., 2019. SPH modeling of water-related natural hazards. *Water (Switzerland)* 11, 1875. <https://doi.org/10.3390/w11091875>
- Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., Le Touzé, D., Graziani, G., 2011.  $\delta$ -SPH model for simulating violent impact flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 200, pp.1526–1542. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.12.016>
- Meringolo, D.D., Marrone, S., Colagrossi, A., Liu, Y., 2019. A dynamic  $\delta$ -SPH model: How to get rid of diffusive parameter tuning. *Comput. Fluids* 179, pp.334–355. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.11.012>
- Molteni, D., Colagrossi, A., 2009. A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH. *Comput. Phys. Commun.* 180, pp.861–872. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.12.004>
- Monaghan, J.J., 1994. Simulating Free Surface Flows with SPH. *J. Comput. Phys.* 110, pp.399–406. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>
- Monaghan, J.J., 1992. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 30, pp.543–574. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
- Nasar, A.M.A., Fourtakas, G., Lind, S.J., King, J.R.C., Rogers, B.D., Stansby, P.K., 2021. High-order consistent SPH with the pressure projection method in 2-D and 3-D. *J. Comput. Phys.* 444, p.110563. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110563>
- Park, S.H., Jo, Y.B., Ahn, Y., Choi, H.Y., Choi, T.S., Park, S.S., Yoo, H.S., Kim, J.W., Kim, E.S., 2020. Development of Multi-GPU–Based Smoothed Particle Hydrodynamics Code for Nuclear Thermal Hydraulics

- and Safety: Potential and Challenges. *Front. Energy Res.* 8. <https://doi.org/10.3389/fenrg.2020.00086>
- Price, D., 2005. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Reports Prog. Phys.* 68, pp.1703–1759. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01>
- Randles, P.W., Libersky, L.D., 1996. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, pp.375–408. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0)
- Rastelli, P., Vacondio, R., Marongiu, J.C., Fourtakas, G., Rogers, B.D., 2022. Implicit iterative particle shifting for meshless numerical schemes using kernel basis functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 393, p.114716. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114716>
- Ravanbakhsh, H., Faghih, A.R., Fatehi, R., 2023. Implementation of improved spatial derivative discretization in DualSPHysics: simulation and convergence study. *Comput. Part. Mech.* 10, pp.1685–1696. <https://doi.org/10.1007/s40571-023-00582-1>
- Sun, P.N., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M., Zhang, A.-M., 2019. A consistent approach to particle shifting in the  $\delta$ -Plus-SPH model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 348, pp.912–934. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.01.045>
- Sun, P. N., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M., Zhang, A.M., 2018. Multi-resolution Delta-plus-SPH with tensile instability control: Towards high Reynolds number flows. *Comput. Phys. Commun.* 224, pp.63–80. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.11.016>
- Sun, P.N., Colagrossi, A., Marrone, S., Zhang, A.M., 2017. The  $\delta$ plus-SPH model: Simple procedures for a further improvement of the SPH scheme. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 315, pp.25–49. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.10.028>
- Sun, Peng Nan, Colagrossi, A., Zhang, A.M., 2018. Numerical simulation of the self-propulsive motion of a fishlike swimming foil using the  $\delta$ +SPH model. *Theor. Appl. Mech. Lett.* 8, pp.115–125. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2018.02.007>
- Takeda, H., Miyama, S.M., Sekiya, M., 1994. Numerical Simulation of Viscous Flow by Smoothed Particle Hydrodynamics. *Prog. Theor. Phys.* 92, pp.939–960. <https://doi.org/10.1143/ptp/92.5.939>
- Toma, M., Chan-Akeley, R., Arias, J., Kurgansky, G.D., Mao, W., 2021. Fluid–structure interaction analyses of biological systems using smoothed-particle hydrodynamics. *Biology (Basel)*. 10, pp.1–12. <https://doi.org/10.3390/biology10030185>
- Vacondio, R., Altomare, C., De Leffe, M., Hu, X., Le Touzé, D., Lind, S., Marongiu, J.C., Marrone, S., Rogers, B.D., Souto-Iglesias, A., 2021. Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes. *Comput. Part. Mech.* 8, pp.575–588. <https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1>
- Valdez-Balderas, D., Domínguez, J.M., Rogers, B.D., Crespo, A.J.C., 2013. Towards accelerating smoothed particle hydrodynamics simulations for free-surface flows on multi-GPU clusters. *J. Parallel Distrib. Comput.* 73, pp.1483–1493. <https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2012.07.010>
- Valizadeh, A., Monaghan, J.J., 2015. A study of solid wall models for weakly compressible SPH. *J. Comput. Phys.* 300, pp.5–19. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.033>
- Violeau, D., Rogers, B.D., 2016. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for free-surface flows: Past, present and future. *J. Hydraul. Res.* 54, pp.1–26. <https://doi.org/10.1080/00221686.2015.1119209>
- Wang, L., Khayyer, A., Gotoh, H., Jiang, Q., Zhang, C., 2019. Enhancement of pressure calculation in projection-based particle methods by incorporation of background mesh scheme. *Appl. Ocean Res.* 86, pp.320–339. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2019.01.017>
- Wu, G.X., Ma, Q.W., Eatock Taylor, R., 1998. Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method. *Appl. Ocean Res.* 20, pp.337–355. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(98\)00030-3](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(98)00030-3)
- Ye, T., Pan, D., Huang, C., Liu, M., 2019. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for complex fluid flows: Recent developments in methodology and applications. *Phys. Fluids*, 31. <https://doi.org/10.1063/1.5068697>
- You, Y., Khayyer, A., Zheng, X., Gotoh, H., Ma, Q., 2021. Enhancement of  $\delta$ -SPH for ocean engineering applications through incorporation of a background mesh scheme. *Appl. Ocean Res.* 110, pp.102508. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2020.102508>
- Zhang, D.H., Shi, Y.X., Huang, C., Si, Y.L., Huang, B., Li, W., 2018. SPH method with applications of oscillating wave surge converter. *Ocean Eng.* 152, pp.273–285. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.057>



مقاله پژوهشی

Available Online: <http://jmst.kmsu.ac.ir>



## بهبود روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده جهت شبیه سازی مسأله موج ساز

حسام الدین روانبخش<sup>۱</sup>، احمد رضا فقیه خراسانی<sup>\*</sup>، روح اله فاتحی<sup>۲</sup>

۱. بخش تبدیل انرژی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

۲. گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.

\* نویسنده مسئول، پست الکترونیک: [faghieh@yazd.ac.ir](mailto:faghieh@yazd.ac.ir)

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۲۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۶/۲۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۰۴

شناسه دیجیتال (DOI): 10.22113/jmst.2024.473084.2608

### چکیده

بهبود دقت و مرتبه همگرایی در روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده، هنوز یکی از چالش‌های پژوهشگران است. در این پژوهش، طرح همگرایی مرتبه اول برای مشتق اول فضایی، در معادله‌های پیوستگی و بقای مومنوم خطی کد متن باز DualSPHysics، جهت افزایش دقت و مرتبه همگرایی، پیاده‌سازی شده است. با دستیابی به بیش از سه مرتبه بهبود در مقدار دقت، پس از پیاده‌سازی این روش برای شبیه‌سازی مسأله معیار گردابه تیلور-گرن در پژوهش گذشته نویسندگان، در این مطالعه، شبیه‌سازی مسأله معیار موج‌ساز توسط حلگرهای استاندارد و بهبود یافته و مقایسه با نتایج تحلیلی از طریق محاسبه نرم یک خطای نسبی مقادیر سرعت در موقعیت معینی از دامنه حل، مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. وجود شرایط مرزی جامد ساکن و متحرک و همچنین سطح آزاد از چالش‌های اصلی مسأله جدید است. با بکارگیری حلگر بهبود یافته و تنظیم پارامترهای مؤثری مانند مقدار لزجت مصنوعی، ضریب پخش چگالی، ضریب محاسبه شعاع همسایگی و ضریب جابجایی ذرات، بهبود روند کاهش خطا و دستیابی به همگرایی مرتبه اول آن، مشاهده می‌شود.

واژگان کلیدی: روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده، دقت، مرتبه همگرایی خطا، مشتق فضایی بهبود یافته، DualSPHysics

(Randles and Libersky, 1996) and (Price, 2005) تا (Ye et al., 2019; Toma et al., 2021) جریان‌های زیستی مورد استفاده قرار گرفته است. این روش توانایی‌اش را برای حل مسائل تغییرات غیرخطی مانند شکست و برخورد موج، فرآیند اختلاط چندفاز، برخورد جت، آشفتگی و برهم‌کنش سیال-سازه نشان داده است. (Gingold and Monaghan, 1982; Takeda et al., 1994)

### ۱. مقدمه

روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده (SPH: Smoothed Particle Hydrodynamics)، روشی بدون شبکه، بر مبنای ذره و بر پایه رویکرد لاگرانژی است. از سال ۱۹۷۷ میلادی که این روش برای شبیه‌سازی سیالات تراکم‌پذیر معرفی شد (Monaghan, 1994)؛ تلاش‌های زیادی برای بهبود آن صورت پذیرفته است و از اخترشناسی

### Copyrights:

Copyright for this article is retained by the author(s), with publication rights granted Journal of Marine Science and Technology. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.



متحرک مانند سطوح آزاد توسط روش‌های شبکه‌ای اوپلری و لاگراژی (Gotoh and Khayyer, 2018). از این رو، روش SPH که بر مبنای ذره بنا شده، قابلیت‌های مفیدی در رفع چنین چالشی از خود نشان داده است (Antuono et al., 2011; Marrone et al., 2011; Bouscasse et al., 2013; De Chowdhury and Sannasiraj, 2014; Valizadeh and Monaghan, 2015). با وجود این، تحقیقات جهت بهبود پایداری آن در فشار منفی و ناپایداری کششی (Sun et al., 2017; P. N. Sun et al., 2018; Peng Nan Sun et al., 2018; Meringolo et al., 2019) همچنان ادامه دارد. از نتایج جذاب تلاش فرزین و همکاران (Farzin et al., 2019)، در راستای پژوهش حاضر، ارائه و استفاده از چاره‌اندیشی‌های مرزی است. در مجاورت مرزهای جامد، شرط مرزی عدم لغزش/لغزش آزاد به کار رفته است (Fatehi and Manzari, 2012; Hashemi et al., 2012) و برای رصد مرز سطح آزاد معیارهایی شامل شرطهایی روی مقادیر دترمینان ماتریس بهنجارساز، گرادیان تابع هموارساز، تابع هموارساز و اندازه تانسور بهنجارساز دوم ارائه نموده است. تقریب انتگرالی تابع هموارساز SPH برای یک تابع و مشتق آن در ناحیه داخلی دقت درجه دو دارند و در مقابل برای مرزها و سطوح فصل مشترک، این تقریب تابع هموارساز دقتی کمتر از درجه یک دارد که بدلیل تقریب برش خورده (Truncated) ناحیه است و به عنوان ناکارایی مرزی (Boundary deficiency) روش مرسوم SPH شناخته می‌شود (Monaghan, 1992; Price, 2005; Liu et al., 2012).

تقریب ذره SPH فرم پیوسته تقریب تابع هموارساز و مشتقات آن را به مجموع گسسته‌ای روی ذرات تبدیل می‌کند. استفاده از مجموع ذره برای تقریب انتگرال، بدون استفاده از شبکه‌بندی میدان برای انتگرال‌گیری عددی، نقش کلیدی در ساده‌سازی روش SPH دارد و همچنین دقت حل روش SPH را تعیین می‌کند. هنگامی که ذرات به‌طور دلخواه توزیع مکانی شده‌اند و در هر مرحله زمانی موقعیت آنها تغییر می‌کند، تحلیل دقت تقریب ذره SPH مشکل است. باید توجه داشت که دقت مرتبه دو اشاره شده در بالا، فقط برای توزیع منظم ذرات اعتبار دارد و حالت ایده‌آل فرض می‌شود؛ زیرا ذرات SPH حتی اگر در ابتدا منظم باشند، اغلب طی زمان به‌طور نامنظم در دامنه شبیه‌سازی توزیع خواهند شد. برای مرز یا سطوح فصل مشترک و یا توزیع غیرمنظم ذرات، تقریب ذره SPH می‌تواند دقتی کمتر از درجه یک داشته باشد، زیرا توانایی بازتولید یک تابع خطی یا حتی ثابت را ندارد. این مشکل، به عنوان ناسازگاری ذره‌ای (Particle inconsistency) نامیده می‌شود؛ به عبارتی ذرات مرزی، توزیع نامنظم ذرات و طول هموارساز متغیر معمولاً می‌توانند باعث تفاوت بین تقریب تابع هموارساز و تقریب ذره شده و ناسازگاری تقریب ذره را

با این وجود، موضوع همگرایی این روش، یکی از چالش‌های آن است (Vacondio et al., 2021). در میان مطالعات مربوط به سازگاری تقریب ذره، بسط سری تیلور برای اصلاح تقریب تابع هموار و مشتق آن جهت افزایش نرخ همگرایی استفاده شده است (Liu and Liu, 2006). استفاده از ماتریس بهنجارساز برای اصلاح گرادیان تابع هموارساز و دستیابی به سازگاری مرتبه اول، بهبود دیگری در رابطه با توزیع غیریکنواخت ذرات است (Fourtakas et al., 2019; Sun et al., 2019). از میان روش‌های بدون شبکه، روش SPH بدلیل پیشرفت در حل مسائل مهندسی، مورد توجه قرار گرفته است (Violeau and Rogers, 2016; Manenti et al., 2019; Amicarelli et al., 2020; Khayyer et al., 2022). با وجود این، در این روش نوسان‌های قابل توجه غیرفیزیکی فشار مشاهده می‌شود (Gotoh and Khayyer, 2018; Wang et al., 2019). تحقیقات زیادی برای افزایش پایداری این روش در حال انجام است؛ از قبیل، سازگاری میدان فشار (Antuono et al., 2021; You et al., 2021)، روش‌های مرتبه بالا (King et al., 2021; Nasar et al., 2020)، ناهمسانگردی فضایی ذرات (Rastelli et al., 2022) و توسعه عملکرد آن (Balderas et al., 2013; Park et al., 2020). روش‌هایی مانند W-CSPH (Inutsuka, 2012; Gao et al., 2012) و delta-SPH (Marrone et al., 2011; Antuono et al., 2012; Fourtakas et al., 2019) برای افزایش دقت و پایداری روش SPH و بویژه جهت مقابله با نوسان غیرفیزیکی فشار ارائه شده‌اند. روش delta-SPH با اضافه نمودن جمله عددی مناسب برای پخش چگالی به معادله پیوستگی موجب کاهش نوسان‌های عددی بسامد بالای میدان فشار می‌شود. همچنین نظر به ناکارایی مرزی این روش، تلاش‌هایی جهت افزایش دقت آن صورت پذیرفته است (Han et al., 2013; Long et al., 2017; Zhang et al., 2018). با ارائه یک روش با استفاده از گام‌برداری زمانی مصنوعی و روش دیگر با اضافه نمودن جمله‌ای جبران‌ساز به معادله مومنتوم جهت دستیابی به میدانی با دیورژانس سرعت صفر و مقایسه آن‌ها با روش W-CSPH، برای سه مسأله تراکم‌ناپذیر، به میدان فشار هموارتر و واگرایی کمتری نائل گردیدند.

تا به امروز، مطالعات عددی زیادی بر روی جریان‌های سطح آزاد بر مبنای شبکه‌بندی اوپلری صورت پذیرفته است (Wu et al., 2005; Chen and Nokes, 1998). با این حال، چالش‌های مهمی در رابطه با ویژگی‌های غیرخطی و پیچیده این نوع جریان‌ها، بر این مبنا وجود دارد؛ از جمله، چاره‌اندیشی دقیق و کارآمد برای مرز مشترک

دنبال شده و در این خصوص بکارگیری معیارهای متنوع تشخیص سطح آزاد سیال و شرایط دینامیکی حاکم بر آن و همچنین، محاسبه فشار ذرات جامد، از چالش‌های این مسأله در ادامه این مقاله هستند. در این راستا، با توجه به نتایج تحلیل موجود، نرم یک خطای نسبی سرعت موقعیت معینی از مسأله موج‌ساز، محاسبه می‌شود.

منجر شوند (Liu and Liu, 2006). به دلیل اینکه روش SPH مرسوم به عنوان روش با دقت درجه کم در نظر گرفته می‌شود، کوشش‌های محققان منجر به توسعه نسخه‌های اصلاح شده یا بهبود یافته متنوعی از طرح‌های تقریب ذره SPH شده است (Lind et al., 2020).

هدف از این پژوهش، استفاده از روش تصحیح گرادیان تابع هموارساز برای کاهش خطا و افزایش همگرایی حل با پیاده‌سازی فرم تفاضلی گرادیان فشار در نرم افزار متن باز DualSPHysics است. بعد از اطمینان از بهبود نتایج در مسأله معیار گردابه تیلور-گرین (Ravanbakhsh et al., 2023)، در این مطالعه، شبیه‌سازی مسأله موج‌ساز شامل شرایط مرزی سطح آزاد و دیواره‌های ساکن و متحرک

## ۲. مواد و روش‌ها

در جدول ۱، اختصارات به کار رفته در متن مقاله و روابط استفاده شده، مشخص شده‌اند.

### جدول ۱- اختصارات

حروف کوچک انگلیسی	
$c_o$	Speed of sound
$dv$	Particle volume element
$e_{ij}$	The unit vector of particle $i$ relative to particle $j$
$f$	Flow field quantity
$g$	Gravitational acceleration vector
$h$	Smoother length
$m$	Particle mass
$n$	Normal vector
$r$	Position vector
$r^\alpha$	The direction of the spatial derivative of the smoothing function
حروف بزرگ انگلیسی	
<b>B</b>	Renormalizing matrix
<b>DDT</b>	Density Diffusion term
<b>Dp</b>	The initial distance of each pair of particles
<b>L<sub>1</sub></b>	Relative 1- norm of error
<b>P</b>	Pressure
<b>SS</b>	Standard Solver of the software
<b>V</b>	Velocity vector
<b>W</b>	Smoother function
<b>WCSPH</b>	Weakly Compressible SPH
حروف یونانی	
$\delta$	Coefficient of the Density Diffusion Term
$\rho$	Density
$\nu$	Kinematic viscosity
$\omega$	Particle volume
بالانویس	
<b>D</b>	Dynamics
<b>H</b>	Hydrostatics

$T$	Total
	زیرنویس
$i$	Indicator of the desired particle
$j$	Indicator of particles neighboring particle

تقریب ذره مربوط به تابع  $f$  در SPH مرسوم، به صورت رابطه (۲) نوشته می‌شود که  $W_{ij}(r) = W(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, h)$  و تعداد ذرات در ناحیه پوششی ذره  $i$  است.  $m_j$  و  $\rho_j$  هم به ترتیب جرم و چگالی ذره  $j$  همسایه است.

تقریب ذره مرتبط با مشتق مکانی با جایگذاری تابع در رابطه (۳) به دست می‌آید که  $W_{i,\alpha} = \frac{\partial W_i(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha}$  مشتق یکم مکانی ذره  $i$  در جهت  $\alpha$  است.

$$f_i \cong \int f(\mathbf{r})W_i(\mathbf{r})dv \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$f_i \cong \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij} \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$f_{i,\alpha} \cong \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{i,\alpha} \quad \text{رابطه (۳)}$$

بعدی، بر مبنای بسط سری تیلور روی تقریب SPH تابع، دقت توسط تصحیح روی گرادیان تابع هموارساز با ضرب داخلی ماتریس به‌هنجارساز رابطه (۴)، در گرادیان تابع هموارساز، بازیابی شود.

معادله‌های بقای جرم و بقاء تکانه خطی جریان غیرلزج در محیط پیوسته به ترتیب به صورت رابطه‌های (۵) و (۶) هستند.

$$B(\mathbf{r}_i) = \left( \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \begin{pmatrix} x_{ji} W_{i,x} & y_{ji} W_{i,x} \\ x_{ji} W_{i,y} & y_{ji} W_{i,y} \end{pmatrix} \right)^{-1} \quad \text{رابطه (۴)}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \text{رابطه (۵)}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} \quad \text{رابطه (۶)}$$

سرعت صوت، به‌طور مصنوعی کاهش یابد. دلیل این امر، حفظ گام زمانی در محدوده‌ای براساس شرط کورانت (condition Courant) است. اگر نسبت سرعت صوت به بیشینه سرعت سیال حداقل ۱۰ باشد؛

در روش SPH، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم در دو مرحله تقریب‌زده می‌شوند؛ تقریب تابع هموارساز و تقریب ذره. تقریب یک تابع در موقعیت ذره  $i$  با ضرب تابع در تابع هموارساز  $W$  و سپس انتگرال‌گیری روی دامنه محاسباتی به صورت رابطه (۱)، بدست می‌آید (House and Keyser, 2020)؛ که  $r$  بردار موقعیت،  $dv$  المان حجمی ماده و  $W_i(r) = W(r - r_i, h)$  تابع هموارسازی است که تأثیر آن به ناحیه پوششی مشخص شده توسط طول هموارسازی  $h$  ضرب در ضریب اسکالر  $K$  محدود و فضای اطراف ذره  $i$  را برای لحاظ ذرات همسایه مشخص می‌کند.

یکی از رویکردهای ارائه‌شده برای بهبود دقت، روش تصحیح گرادیان تابع هموارساز (KGC: Kernel Gradient Correction) است (Bonet and Lok, 1999). دقت تقریب مشتق‌ها تا حدودی با محاسبه گرادیان تابع هموارساز متناسب است؛ لذا استفاده از گرادیان تابع هموارساز تصحیح‌کننده به جای مورد مرسوم آن برای بدست آوردن دقت تقریب بیشتر مورد توجه است. برای مثال در فضای دو

در مدل تراکم‌پذیری ضعیف برای جریان تراکم‌ناپذیر، برای تعیین فشار بر مبنای چگالی، به معادله حالت نیاز است (Monaghan, 1994). بر این اساس، تراکم‌پذیری به‌گونه‌ای تنظیم می‌شود که

تغییرات چگالی کمتر از یک درصد خواهد بود و از رویکرد تراکم‌ناپذیری انحراف بسیار اندکی دارد. معادله حالت برای تکمیل معادله بقای جرم و اندازه حرکت خطی، طبق رابطه (۷)، است (Monaghan, 1994). در این رابطه برای آب  $\gamma = 1$ ،  $b = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma}$

تغییرات چگالی کمتر از یک درصد خواهد بود و از رویکرد تراکم‌ناپذیری انحراف بسیار اندکی دارد. معادله حالت برای تکمیل معادله بقای جرم و اندازه حرکت خطی، طبق رابطه (۷)، است (Monaghan, 1994).

$$b = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma}, \quad \gamma = 1$$

$$P = b \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad \text{رابطه (۷)}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad \text{رابطه (۸)}$$

جمله لزجت مصنوعی  $\Pi_{ij}$  به صورت رابطه (۱۰) است؛ که

جمله سمت راست رابطه (۸)، همان شکل گسسته‌سازی‌شده دیورژانس سرعت معادله (۵) را به روش SPH نشان می‌دهد. رابطه (۹) نیز شکل گسسته‌سازی‌شده معادله (۶) را به روش SPH استاندارد نمایش داده است (Domínguez et al., 2021).

$$\eta = \frac{h}{c_{ij}} \quad \text{و} \quad \mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij}^2 + \eta^2)}$$

است.  $\alpha$  نیز ضریبی برای تنظیم جمله لزجت مصنوعی جهت ارائه اتلاف مناسب است.

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i \cdot \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + \mathbf{g} \quad \text{رابطه (۹)}$$

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0 \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

هر چه دقیق‌تری به معادله پیوستگی اضافه نمود، پژوهش‌های متنوعی برای تعیین جمله مناسب جهت اضافه نمودن به معادله پیوستگی صورت پذیرفته است. عبارتی موسوم به جمله پخش چگالی به شکل رابطه (۱۱)، برای کاهش نوسان‌های میدان فشار/چگالی مورد استفاده قرار گرفته است (Molteni and Colagrossi, 2009).

در روش SPH ناپایداری و نوسان‌های عددی فرکانس بالا بدلیل هم‌افزایی ناسازگاری‌های روش‌های گسسته‌سازی جمله‌های معادلات پیوستگی و تکانه خطی، در میدان فشار و چگالی (ارتباط دو میدان به‌دلیل رابطه حالت بین آنها) بوجود می‌آید. برای به حداقل رساندن این پدیده باید از طرح‌های گسسته‌سازی مناسب استفاده شود؛ همچنین بدلیل ماهیت پخش این عدم ناسازگاری‌ها، باید جمله پخش

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \delta h c_0 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \Psi_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

$$\Psi_{ij}^{Mo} = \tau (\rho_j - \rho_i) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^\tau} \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

از آنجایی که  $\rho^D = \rho^T - \rho^H$  داریم (رابطه ۱۴):

$$\Psi_{ij} = \nu(\rho_j^D - \rho_i^D) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

$$\Psi_{ij} = \nu(\rho_{ij}^T - \rho_{ij}^H) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

معادلات حاکم بر سطح آزاد و معیارهای تشخیص آن، بیان شده و سپس الگوریتم و مراحل پیاده‌سازی آن، مطرح می‌گردد. معادله‌های جدید به صورت روابط (۱۶) و (۱۷)، خواهند بود.

$$\rho_{ij}^H = \rho \cdot \left( \sqrt{\frac{P_{ij}^H}{C_B}} + 1 - 1 \right) \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_i = \rho_i \sum_j \mathbf{v}_{ij} \cdot (\mathbf{B}_i \cdot \nabla W_{ij}) \omega_j + \delta h c_0 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \Psi_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j (p_j - p_i) \mathbf{B}_i \cdot \nabla W_{ij} \omega_j \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

ملاحظه خطا در مشتق مکانی اول بر پایه تقریب ذره می‌شود. برای محاسبه فشار روی دیواره، در غیاب تنش برش سیال از رابطه (۱۸)، استفاده شده است (Fatehi and Manzari, 2012) و با توجه به اینکه، مولفه عمود بر دیوار شتاب لحاظ گردیده است، شرط عدم لغزش لازم نیست و برای لغزش آزاد نیز معتبر است:

$$p_i^{n+1} = \frac{\left( \sum_j \omega_j \frac{p_j^n}{\rho_j} \mathbf{B}_i \cdot \nabla W_{ij} \right) \cdot \mathbf{n}_i - (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{\text{wall}}) \cdot \mathbf{n}_i}{\left( \sum_j \omega_j \frac{1}{\rho_j} \mathbf{B}_i \cdot \nabla W_{ij} \right) \cdot \mathbf{n}_i} \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

ادامه تلاش‌ها برای بهبود رابطه (۱۲)، منجر به ایده کلیدی در جایگزینی چگالی دینامیکی به جای چگالی کلی شد (Fourtakas et al., 2019):

با کمک معادله حالت، اختلاف چگالی هیدرواستاتیکی نیز از رابطه (۱۵)، بدست می‌آید؛ که  $P_{ij}^H = \rho_0 g z_{ij}$ . اکنون به روش پیاده‌سازی طرح بهبود مشتق اول مکانی، پرداخته می‌شود؛ همچنین،

تانسور به‌هنجارساز  $\mathbf{B}_i$  با حذف جملات مرتبه پایین در خطای قطع کردن از ظهور این خطاها در محاسبه مشتق مکانی روی ذراتی که توزیع یکنواختی پیرامون خود ندارند، جلوگیری می‌کند (Fatehi and Manzari, 2012). فرم غیرممتقارن رابطه (۱۷)، مرتبه اول همگرایی را تضمین می‌کند و باعث کاهش قابل

تنظیم پارامترها در مسائل مختلف، موجب می‌شود که مقدار معیارهای تشخیص سطح آزاد متنوع و متغیر شوند. این معیارها عبارتند از (Farzin et al., 2019):

$$\det(\mathbf{B}_i) \leq 0.65$$

$$\sum_j W_{ij} < \frac{0.18}{\omega_i}$$

$$\left| \sum_j \nabla W_{ij} \mathbf{e}_{ij} \right| > 0.13$$

$$|\mathbf{B}_i| > 2$$

سرعت نهایی ذره،  $\lambda$  ضریب تنظیم میرایی،  $x$  موقعیت ذره و  $x_0$  و  $x_1$  به ترتیب موقعیت شروع و پایان ناحیه میراسازی است. نمایی از دامنه حل با موج‌ساز پیستونی (رفت و برگشتی) در شکل (۱) و مشخصات هندسی و هیدرودینامیکی این مسأله در جدول (۱)، ارائه شده است. الگوریتم حل مسأله موج‌ساز به روش بهبودیافته، در نرم‌افزار مربوطه مطابق جدول (۲)، پیاده‌سازی شده است.

برای تشخیص سطح آزاد، از چهار معیار رابطه (۱۹)، استفاده شده و در کد احراز هم‌زمان آن‌ها، ملاک اعمال شرط مرزی مربوطه قرار گرفته است. البته، حساسیت روش SPH به

رابطه (۱۹)

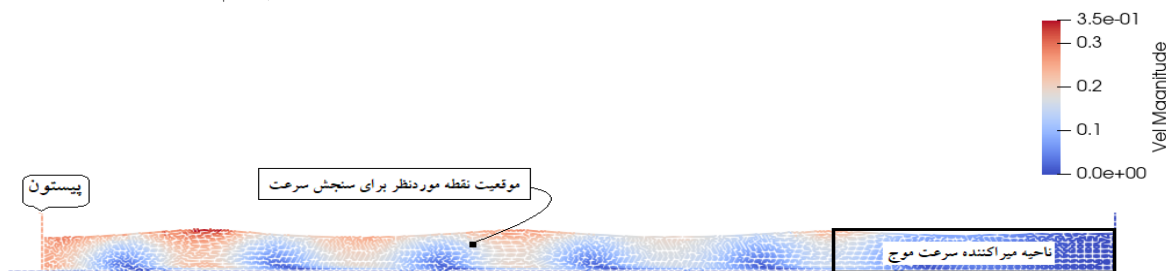
جمله آخر رابطه (۱۹)، نرم ماتریس به‌هنگام‌ساز  $\mathbf{B}$  است. در این مسأله، موج‌ساز از نوع پیستونی در سمت چپ دامنه حل (مطابق شکل (۱))، با حرکت رفت و برگشتی، موج مرتبه دوم منظم را ایجاد می‌کند. شرط اولیه سرعت پیستون صفر است و بستر دامنه حل ساکن در نظر گرفته شده است. در سمت راست دامنه، جهت جلوگیری از بازگشت موج، با بکارگیری رابطه (۲۳)، سرعت موج میرا می‌شود. در اینجا  $\mathbf{V}_0$  سرعت اولیه ذره،  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \cdot f(x, \Delta t)$$

رابطه (۲۰)

$$f(x, \Delta t) = 1 - \Delta t \cdot \lambda \cdot \left( \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right)^2$$

رابطه (۲۱)



شکل ۱ - نمایی از مسأله موج‌ساز (پیستونی)

Fig. 1- A view of the wave maker (piston) problem

جدول ۱ - مشخصات هندسی و هیدرودینامیکی مسأله موج‌ساز

Table 1- Geometrical and hydrodynamic characteristics of the wavemaker problem

Domain length	Water depth	Wave height	Wave length	period	Wave type
15.5(m)	0.66(m)	0.15(m)	4.52(m)	2(s)	Regular second order

جدول ۲- الگوریتم پیاده‌سازی روش بهبودیافته

Table 2- Implementation algorithm of the improved method

Improved method algorithm
<b>Initialize:</b> hydrostatic pressure to all particles and calculation of its corresponding density using the equation of state (7)
<b>At each time step for each particle:</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculation of the pressure of all fluid particles using the initial density in the equation of state (7)</li> <li>2. Calculation of matrix B according to equation (4)</li> <li>3. Calculate the pressure of all solid particles using equation (18)</li> <li>4. Determining free surface particles using relationship criteria (19)</li> <li>5. Removal of substrate particles located on the left side of the piston from the neighborhood domain</li> <li>6. Removal of piston particles that are above the free surface from the neighborhood domain</li> <li>7. Calculation of acceleration and particle density rate of the free surface of the fluid, respectively, using relations (9) and (11)</li> <li>8. Calculation of acceleration and density rate of fluid particles inside the solution domain, respectively, using new relations (16) and (17)</li> </ol>

### ۳. نتایج

با توجه به اینکه، لزجت مصنوعی برای شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته و یکی از پیچیدگی‌های روش SPH تنظیم دقیق پارامترهای حل بوده و مرحله‌ای زمانبر جهت همگرایی شبیه‌سازی است. سعی گردیده ارزیابی سیستماتیکی در محدوده مناسبی از تأثیر آن‌ها به عمل آورده شود که در جدول (۳)، ارائه گردیده است. مهمترین پارامترهای مؤثر در نتایج، مقدار لزجت مصنوعی، ضریب DDT، ضریب محاسبه شعاع همسایگی، ضریب جابجایی ذرات و ضریب محاسبه گام زمانی است و با بررسی کد، در صورت همگراشدن مسأله، مورد آخر بی‌تأثیر است. همچنین، چالش دیگر این مسأله، وجود مرزهای جامد ساکن/متحرک و سطح آزاد و استفاده از معیارهای متنوع تشخیص سطح آزاد و تعیین مقادیر آنها است.

با وجود، نتایج گرافیکی رضایت‌بخش شکل (۲)، برای توزیع ذرات و بردارهای سرعت نسبت به حلگر استاندارد، ارزیابی کمی نتایج، جهت محاسبه خطا ضروری است؛ همچنین، برای خلاصه‌نویسی در مقایسه نتایج، نماد SS نشان‌دهنده حلگر استاندارد نرم‌افزار معرفی شده است. پارامترهای جدول (۳)، بر این اساس تعیین شده‌اند که اجرا شبیه‌سازی پس از طی حالت گذرا ابتدایی، باید جهت اطمینان از پایداری حل، ۱۵ ثانیه یا به عبارتی ۵ دوره تناوب پس از ثانیه ۵، بدون واگرایی ادامه یابد. ضریب محاسبه شعاع همسایگی و ضریب جابجایی ذرات، به ترتیب (۰/۸۵) و (-۲۰) تعیین شده است. با توجه به اینکه نتایج تحلیلی این مسأله در دسترس است (Altomare et al., 2017)؛ ارزیابی خطا از طریق محاسبه نرم یک خطای نسبی براساس رابطه (۲۲)، در مورد مقدار سرعت‌های افقی و عمودی در نقطه‌ای با مختصات (۰/۴، ۰، ۶) صورت پذیرفته است.

جدول ۳ - نمونه‌ها و پارامترهای متناظر با آن‌ها

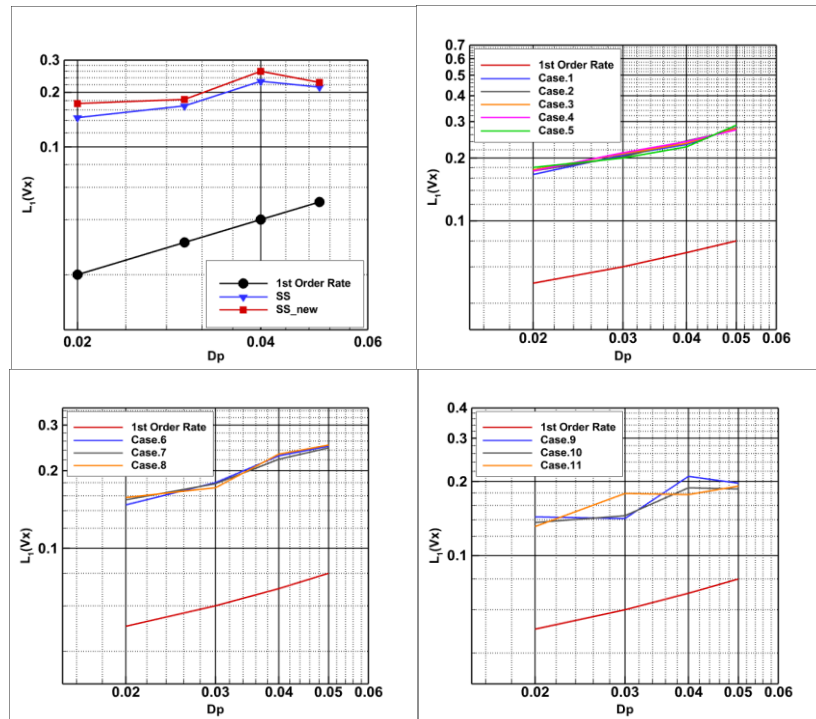
Table 3- Cases and parameters corresponding to them

Case	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	SS	SS <sub>new</sub>
$\nu(m^2/s)$	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0.03
DDT	0.8	0.4	0.3	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2



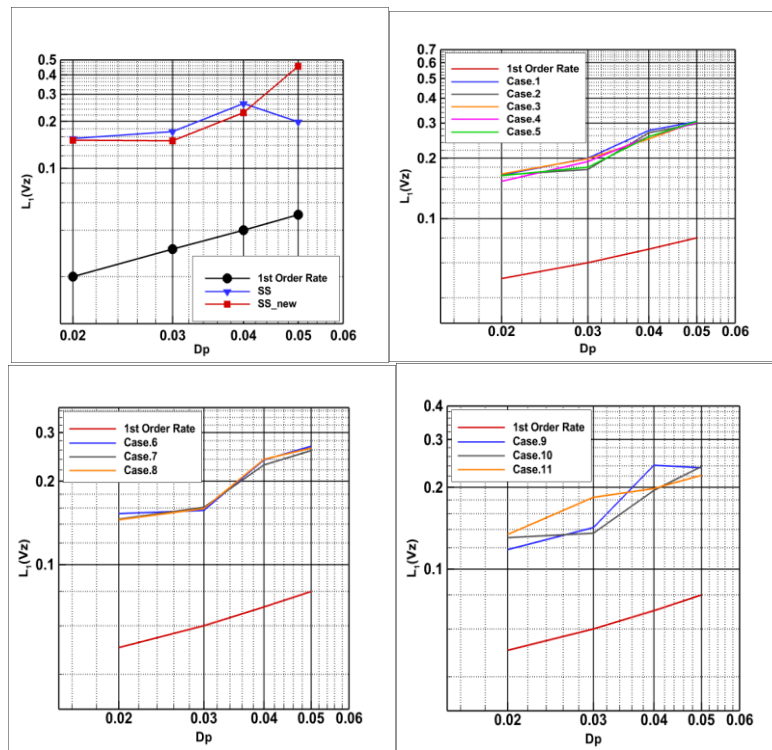
شکل ۲ - مقایسه توزیع ذرات و بردارهای سرعت در مجاورت مرزهای جامد و سطح آزاد، سمت چپ (نمونه SS) و سمت راست (نمونه ۴، جدول (۳))

Fig. 2 - Comparison of particle distribution and velocity vectors in the vicinity of solid boundaries and free surface, left side (Case SS) and right side (Case 4 of Table (3))



شکل ۳ - خطای نسبی  $L_1$  سرعت افقی

Fig. 3 -  $L_1$  relative error of horizontal velocity



شکل ۴ - خطای نسبی  $L_1$  سرعت عمودی

Fig. 4 -  $L_1$  relative error of vertical velocity

$$L_1 = \frac{\sum_N (|V^{analytical} - V^{DualSPPhysics}|)}{\sum_N (V^{analytical})} \quad (22)$$

به ترتیب در معادله‌های بقای مومنتوم خطی و پیوستگی و همچنین استفاده از روش گسسته‌سازی تفاضلی عملگر گرادیان، سعی در بهبود روند افزایش دقت و مرتبه همگرایی گردیده است. با توجه به اینکه توزیع ذرات پس از طی مراحل اولیه شبیه‌سازی از حالت یکنواخت خارج می‌شود، با استفاده از ماتریس بهنجارساز، جملات مرتبه پایین در خطای قطع کردن در این حالت حذف شده و از ظهور این خطاها در محاسبه مشتق مکانی جلوگیری می‌شود. از طرفی، سازگاری مرتبه اول فرم تفاضلی عملگر گرادیان، بمعنی این است که کمترین مرتبه خطا، مشتق مرتبه دوم بوده و تابع خطی را به طور دقیق محاسبه می‌کند. از بررسی نتایج روش‌های SS، مرتبه همگرایی مشخصی دیده نمی‌شود؛ با وجود این، نتایج بکارگیری روش‌های بهبودیافته، در شبیه‌سازی مسأله موج‌ساز تمایل به مرتبه همگرایی یک را نسبت به روش استاندارد نرم‌افزار به ارمغان آورده است.

نمودارهای بدست آمده برای نرم یک خطای نسبی مؤلفه‌های سرعت افقی و عمودی به ترتیب در شکل‌های (۴) و (۵)، برای سیزده حالت جدول (۳)، ارائه گردیده است. ارزیابی مرتبه همگرایی خطا بر این اساس صورت پذیرفته است که این نمودارها با محورهای مختصات لگاریتمی رسم شوند. در نمونه‌های SS و SSnew، روند همگرایی مشخصی مشاهده نمی‌شود؛ ولی، با مقایسه نتایج نمونه‌های جدول (۳)، مشخص می‌شود در نمونه (۴)، مرتبه همگرایی هر دو مؤلفه سرعت به یک رسیده است.

#### ۴. بحث و نتیجه‌گیری

یکی از چالش‌های پیشروی پژوهشگران، بهبود دقت و مرتبه همگرایی روش هیدرودینامیک ذرات هموارشده است. در این مطالعه، با بکارگیری ماتریس بهنجارساز در عملگرهای گرادیان و دیورژانس

References:

- Altomare, C., Domínguez, J.M., Crespo, A.J.C., González-Cao, J., Suzuki, T., Gómez-Gesteira, M., Troch, P., 2017. Long-crested wave generation and absorption for SPH-based DualSPHysics model. *Coast. Eng.* 127, pp.37–54. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2017.06.004>
- Amicarelli, A., Manenti, S., Albano, R., Agate, G., Paggi, M., Longoni, L., Mirauda, D., Ziane, L., Viccione, G., Todeschini, S., Sole, A., Baldini, L.M., Brambilla, D., Papini, M., Khellaf, M.C., Tagliaferro, B., Sarno, L., Pirovano, G., 2020. SPHERA v.9.0.0: A Computational Fluid Dynamics research code, based on the Smoothed Particle Hydrodynamics mesh-less method. *Comput. Phys. Commun.* 250, p. 107157. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107157>
- Antuono, M., Colagrossi, A., Marrone, S., 2012. Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes. *Comput. Phys. Commun.* 183, pp. 2570–2580. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.07.006>
- Antuono, M., Colagrossi, A., Marrone, S., Lugni, C., 2011. Propagation of gravity waves through an SPH scheme with numerical diffusive terms. *Comput. Phys. Commun.* 182, pp.866–877. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.12.012>
- Antuono, M., Sun, P.N., Marrone, S., Colagrossi, A., 2021. The  $\delta$ -ALE-SPH model: An arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the  $\delta$ -SPH model with particle shifting technique. *Comput. Fluids* 216, pp.104806. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104806>
- Bonet, J., Lok, T.S.L., 1999. Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 180, pp.97–115. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00051-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00051-1)
- Bouscasse, B., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M., 2013. Nonlinear water wave interaction with floating bodies in SPH. *J. Fluids Struct.* 42, pp.112–129. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstruct.2013.05.010>
- Chen, B.F., Nokes, R., 2005. Time-independent finite difference analysis of fully non-linear and viscous fluid sloshing in a rectangular tank. *J. Comput. Phys.* 209, pp.47–81. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.006>
- De Chowdhury, S., Sannasiraj, S.A., 2014. Numerical simulation of 2D sloshing waves using SPH with diffusive terms. *Appl. Ocean Res.* 47, pp.219–240. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2014.06.004>
- Domínguez, J.M., Fourtakas, G., Altomare, C., Canelas, R.B., Tafuni, A., García-Feal, O., Martínez-Estévez, I., Mokos, A., Vacondio, R., Crespo, A.J.C., Rogers, B.D., Stansby, P.K., Gómez-Gesteira, M., 2021. DualSPHysics: from fluid dynamics to multiphysics problems. *Comput. Part. Mech.* 9, pp.867–895. <https://doi.org/10.1007/s40571-021-00404-2>
- Farzin, S., Fatehi, R., Hassanzadeh, Y., 2019. Position explicit and iterative implicit consistent incompressible SPH methods for free surface flow. *Comput. Fluids* 179, pp.52–66. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.10.010>
- Fatehi, R., Manzari, M.T., 2012. A consistent and fast weakly compressible smoothed particle hydrodynamics with a new wall boundary condition. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 68, pp.905–921. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/flid.2586>
- Fatehi, R., Rahmat, A., Tofighi, N., Yildiz, M., Shadloo, M.S., 2019. Density-based smoothed particle hydrodynamics methods for incompressible flows. *Comput. Fluids* 185, pp.22–33. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.02.018>
- Fourtakas, G., Dominguez, J.M., Vacondio, R., Rogers, B.D., 2019. Local uniform stencil (LUST) boundary condition for arbitrary 3-D boundaries in parallel smoothed particle hydrodynamics (SPH) models. *Comput. Fluids* 190, pp.346–361. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.06.009>
- Gao, R., Ren, B., Wang, G., Wang, Y., 2012. Numerical modelling of regular wave slamming on subface of open-piled structures with the corrected SPH method. *Appl. Ocean Res.* 34, pp.173–186. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.08.002>
- Gingold, R.A., Monaghan, J.J., 1982. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 46, pp.429–453. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90025-0)
- Gotoh, H., Khayyer, A., 2018. On the state-of-the-art of particle methods for coastal and ocean engineering. *Coast. Eng. J.* 60, pp.79–103. <https://doi.org/10.1080/21664250.2018.1436243>
- Han, Y.W., Qiang, H.F., Zhao, J.L., Gao, W.R., 2013.

- A new repulsive model for solid boundary condition in smoothed particle hydrodynamics. *Wuli Xuebao/Acta Phys. Sin.* 62. <https://doi.org/10.7498/aps.62.044702>
- Hashemi, M.R., Fatehi, R., Manzari, M.T., 2012. A modified SPH method for simulating motion of rigid bodies in Newtonian fluid flows. *Int. J. Non. Linear. Mech.* 47, pp.626–638. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.10.007>
- House, D., Keyser, J.C., 2020. Smoothed Particle Hydrodynamics, in: Foundations of Physically Based Modeling and Animation. A K Peters/CRC Press, Boca Raton : Taylor & Francis, a CRC title, part of the, pp. 305–314. <https://doi.org/10.1201/9781315373140-26>
- Inutsuka, S.I., 2002. Reformulation of smoothed particle hydrodynamics with Riemann solver. *J. Comput. Phys.* 179, pp.238–267. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7053>
- Khayyer, A., Rogers, B.D., Zhang, A.M., 2022. Preface: Special Issue on Advances and Applications of SPH in Ocean Engineering. *Appl. Ocean Res.* 118, p.103028. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.103028>
- King, J.R.C., Lind, S.J., Nasar, A.M.A., 2020. High order difference schemes using the local anisotropic basis function method. *J. Comput. Phys.* 415, p.109549. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109549>
- Lind, S.J., Rogers, B.D., Stansby, P.K., 2020. Review of smoothed particle hydrodynamics: Towards converged Lagrangian flow modelling: Smoothed Particle Hydrodynamics review. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 476. <https://doi.org/10.1098/rspa.2019.0801>
- Liu, M., Shao, J., Chang, J., 2012. On the treatment of solid boundary in smoothed particle hydrodynamics. *Sci. China Technol. Sci.* 55, pp.244–254. <https://doi.org/10.1007/s11431-011-4663-y>
- Liu, M.B., Liu, G.R., 2006. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Appl. Numer. Math.* 56, pp.19–36. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.02.012>
- Long, T., Hu, D., Wan, D., Zhuang, C., Yang, G., 2017. An arbitrary boundary with ghost particles incorporated in coupled FEM–SPH model for FSI problems. *J. Comput. Phys.* 350, pp.166–183. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.08.044>
- Lucy, L.B., 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.* 82, p.1013. <https://doi.org/10.1086/112164>
- Manenti, S., Wang, D., Domínguez, J.M., Li, S., Amicarelli, A., Albano, R., 2019. SPH modeling of water-related natural hazards. *Water (Switzerland)* 11, p.1875. <https://doi.org/10.3390/w11091875>
- Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., Le Touzé, D., Graziani, G., 2011.  $\delta$ -SPH model for simulating violent impact flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 200, pp.1526–1542. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.12.016>
- Meringolo, D.D., Marrone, S., Colagrossi, A., Liu, Y., 2019. A dynamic  $\delta$ -SPH model: How to get rid of diffusive parameter tuning. *Comput. Fluids* 179, pp.334–355. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.11.012>
- Molteni, D., Colagrossi, A., 2009. A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH. *Comput. Phys. Commun.* 180, pp.861–872. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.12.004>
- Monaghan, J.J., 1994. Simulating Free Surface Flows with SPH. *J. Comput. Phys.* 110, pp.399–406. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>
- Monaghan, J.J., 1992. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 30, pp.543–574. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
- Nasar, A.M.A., Fourtakas, G., Lind, S.J., King, J.R.C., Rogers, B.D., Stansby, P.K., 2021. High-order consistent SPH with the pressure projection method in 2-D and 3-D. *J. Comput. Phys.* 444, p.110563. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.11.0563>
- Park, S.H., Jo, Y.B., Ahn, Y., Choi, H.Y., Choi, T.S., Park, S.S., Yoo, H.S., Kim, J.W., Kim, E.S., 2020. Development of Multi-GPU–Based Smoothed Particle Hydrodynamics Code for Nuclear Thermal Hydraulics and Safety: Potential and Challenges. *Front. Energy Res.* 8. <https://doi.org/10.3389/fenrg.2020.00086>
- Price, D., 2005. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Reports Prog. Phys.* 68, pp.1703–1759. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01>
- Randles, P.W., Libersky, L.D., 1996. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, pp.375–408.

- [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0)
- Rastelli, P., Vacondio, R., Marongiu, J.C., Fourtakas, G., Rogers, B.D., 2022. Implicit iterative particle shifting for meshless numerical schemes using kernel basis functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 393, p. 114716. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114716>
- Ravanbakhsh, H., Faghieh, A.R., Fatehi, R., 2023. Implementation of improved spatial derivative discretization in DualSPHysics: simulation and convergence study. *Comput. Part. Mech.* 10, pp.1685–1696. <https://doi.org/10.1007/s40571-023-00582-1>
- Sun, P.N., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M., Zhang, A.-M., 2019. A consistent approach to particle shifting in the  $\delta$ -Plus-SPH model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 348, pp.912–934. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.01.045>
- Sun, P. N., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M., Zhang, A.M., 2018. Multi-resolution Delta-plus-SPH with tensile instability control: Towards high Reynolds number flows. *Comput. Phys. Commun.* 224, pp.63–80. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.11.016>
- Sun, P.N., Colagrossi, A., Marrone, S., Zhang, A.M., 2017. The  $\delta$ plus-SPH model: Simple procedures for a further improvement of the SPH scheme. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 315, pp.25–49. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.10.028>
- Sun, Peng Nan, Colagrossi, A., Zhang, A.M., 2018. Numerical simulation of the self-propulsive motion of a fishlike swimming foil using the  $\delta$ +SPH model. *Theor. Appl. Mech. Lett.* 8, pp.115–125. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2018.02.007>
- Takeda, H., Miyama, S.M., Sekiya, M., 1994. Numerical Simulation of Viscous Flow by Smoothed Particle Hydrodynamics. *Prog. Theor. Phys.* 92, pp.939–960. <https://doi.org/10.1143/ptp/92.5.939>
- Toma, M., Chan-Akeley, R., Arias, J., Kurgansky, G.D., Mao, W., 2021. Fluid–structure interaction analyses of biological systems using smoothed-particle hydrodynamics. *Biology (Basel)*. 10, pp.1–12. <https://doi.org/10.3390/biology10030185>
- Vacondio, R., Altomare, C., De Leffe, M., Hu, X., Le Touzé, D., Lind, S., Marongiu, J.C., Marrone, S.,
- Rogers, B.D., Souto-Iglesias, A., 2021. Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics