Journal of Marine Science and Technology

Summer 2024, Vol. 23, No.2, pp. 83-106.

Available Online: *http://jmst.kmsu.ac.ir*

Original Article

Solve the path of the great circle using the method of hybrid spherical triangles

Ali mohammadi [1], Mehriar Alimohammadi [2]*, Ahmad Zadeghabadi [1], Abbas Khazaei [3]

1. Department of Meteorology and Oceanography, Imam Khomeini University of Marine Sciences, Nowshahr, Iran.
2. Department of Special Operations and Coast reconnaissance, Imam Khomeini University of Marine Sciences, Nowshahr, Iran.
3. Senior expert in strategic sciences, lecturer at Imam Khomeini University of Marine Sciences, Nowshahr, Iran.

* **Corresponding Author Email:** mhyar_alimohammadi@yahoo.com

Received: 30 August 2022 **Revise Date:** 18 December 2022 **Accepted:** 24 December 2022

DOI: 10.22113/jmst.2022.336659.2477

Abstract

The great circle is of special importance as the shortest distance between two points in navigation. Navigating officers must always be able to calculate the path of the great circle and the turning points on that path. One of the drawbacks of calculations in the path of the great circle is the large volume of calculations and the uncertainty of the correct result. In this research, using the method of composite triangles, the path of the great circle is solved, and two general methods for calculating the rotation points of the great circle, which include a) calculating the rotation point with equal longitude difference and b) calculating the rotation point with distance difference equal is used. Next, using the method of equal longitude difference in calculating the points of rotation, a fast and reliable relationship has been developed to calculate the points of rotation. The premise of the developed method is that the point of rotation is always equal to the difference in longitude between the origin and destination. The developed method has the advantage that it will be able to calculate the turning points on the path of the Great Circle by calculating only 5 sentences from Norris's book in a much shorter time and with fewer calculations.

Keywords: Path, shortest distance, turning points, Norris book

1. INTRODUCTION

The sailing course is an angle between the true north and the ship's head. In normal maps, the road angle is constantly changing and therefore not navigable. The great circle route as the shortest route between two points cannot be used by sailors due to the constant change of route. Mercator first designed a map in 1569 where the lines drawn for the ship's route had the same angle along the route (rhumb line route). Today, this map is known as the Mercator map and is used for navigation. The path of the great circle on the Mercator map is a curve and the line is not straight, so it is impossible to draw it on the Mercator map without knowing the intermediate points. The accepted method for navigation on the Great Circle is that points of the Great Circle are selected and a rhumb line route is drawn between the selected points.

With the advent of computers and navigation aids, the solution of navigation problems by computers was proposed, one of the most important of which is solving the great circle problem by computer, for which a suitable algorithm should be considered. Solving the great circle with the vertex point is called an indirect method; because to solve the rotation points, additional operations are needed to find the vertex point; Therefore, researchers looked for direct methods that require less computation.

2. MATERIALS AND METHODS

First, the mathematical basics of the rhumb line path must be explained, and then the mathematical basics of the great circle path must be discussed. Rhumb line navigation is a navigational that is used to calculate the course and speed of a ship from one latitude to another latitude. The reason why this type of navigation is known as plane navigation is that the earth is considered a flat surface, so this type of navigation in a long distance (distance more than 600 miles) does not have the necessary accuracy and it is necessary Corrections for the sphericity of the earth should be made on the problem. Spherical trigonometry formulas are widely used to solve various spherical geometry problems in various fields such as navigation, aviation, geodesy, and astronomy. However, current spherical trigonometry formulas only express relationships between the sides and angles of a single spherical triangle. Many problems may involve different types of spherical shapes, such as spherical quadrilaterals and spherical polygons, which cannot be solved directly by adopting single spherical triangle formulas; Therefore, the combined spherical triangles approach is a suitable method for solving the path of the great circle.

3. RESULTS

The great circle is of special importance as the shortest distance between two points in navigation. The path of the great circle on the Mercator map is a curve and the line is not straight, so it is impossible to draw it on the Mercator map without knowing the intermediate points. The accepted method for navigation on the Great Circle is that the points of the Great Circle are selected and the rhumb line route is drawn among the selected points. In the navigation on the great circle, turning points on the route should be calculated using existing methods, then a rhumb line should be drawn and calculated between the turning points of the route. An important point in ocean navigation that uses the great circle route is determining the turning points. Most of the methods can not be used in training texts and cannot be used practically by an officer on the watch while watching the bridge. To solve the problem using the vertex method, both a longer path and more calculations are needed to reach the vertex point and after that, we need to perform the calculations related to the turning point, which increases the amount of calculations, in this research by using the method of combined triangles, the path of the great circle has been solved, and two general methods have been used to calculate the turning points of the great circle, which include:

a) calculating the turning point with an equal longitude difference

b) calculating the turning point with equal distance difference.

In the following, using the method of equal longitude difference in the calculation of turning points, a fast and reliable relationship has been developed for calculating turning points. The default of the developed method is that the turning point is always located in the middle of the longitude difference between the origin and the destination. The developed method can calculate the turning point width by only calculating 5 sentences from Norris's book.

4. DISCUSSION AND CONCLUSION

In the new method obtained in thin research, it can be seen that the officer of the watch succeeded in calculating a turning point between the origin and destination point by calculating only 5 terms from Norris's book. This method is significant and useful from two perspectives:

a) The calculation of the latitude and longitude of the turning point is very simplified and there is no need for long calculations of the vertex point, And the coordinates of the turning point are solved directly.

b) There is no doubt about the correctness of the calculations and the obtained result is completely true and the officer of the watch does not need any additional arguments to calculate the turning point.

According to the defined relationship, the officers who are sent to ocean navigation, no longer need to calculate the midpoints of the route through the vortex method for navigation in the ocean, and they can easily use this relationship to find the turning points on the path of the great circle.

مجله علوم وفنون دریایی، فصل نامه ی علمی پژوهشی

دوره ۲۳، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۳، صفحات ۸۳ تا ۱۰۶.

مقاله پژوهشی

Available Online: *http://jmst.kmsu.ac.ir*

حل مسیر دایره عظیمه با استفاده از روش مثلث‌های کروی ترکیبی

علی محمدی [۱]، مهریار علی محمدی [*۲]، احمد ذادق آبادی [۱]، عباس خزایی [۳]

۱. گروه هواشناسی و اقیانوس‌شناسی، دانشگاه علوم دریایی امام خمینی (ره) نوشهر، نوشهر، ایران.

۲. گروه عملیات ویژه و شناسایی ساحل، دانشگاه علوم دریایی امام خمینی (ره) نوشهر، نوشهر، ایران.

۳. کارشناس ارشد علوم راهبردی، مدرس دانشگاه علوم دریایی امام خمینی(ره) نوشهر، نوشهر، ایران.

* **نویسنده مسئول، پست الکترونیک:** mhyar_alimohammadi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۲۳ **تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۱/۰۹/۰۸ **تاریخ پذیرش:**۱۴۰۱/۱۰/۰۳

***شناسه* دیجیتال (DOI):** 10.22113/jmst.2022.336659.2477

چکیده

دایره عظیمه به‌عنوان کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در دریانوردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. افسران ناوبر همواره باید توانایی محاسبه مسیر دایره عظیمه و نقاط چرخش روی این مسیر را داشته باشند. یکی از عیب‌های محاسبات در مسیر دایره عظیمه، حجم زیاد محاسبات و عدم قطعیت در نتیجه درست است. در این پژوهش با استفاده از روش مثلث‌های ترکیبی، مسیر دایره عظیمه مورد حل قرار گفته است و دو روش کلی برای محاسبه نقاط چرخش دایره عظیمه که شامل الف) محاسبه نقطه چرخش با اختلاف طول جغرافیایی مساوی و ب) محاسبه نقطه چرخش با اختلاف فاصله مساوی استفاده شده است. در ادامه با استفاده از روش اختلاف طول جغرافیایی مساوی در محاسبه نقاط چرخش یک رابطه سریع و مطمئن برای محاسبه نقاط چرخش توسعه داده شده است. پیش فرض روش توسعه داده شده این است که نقطه چرخش همواره در منصف اختلاف طول جغرافیایی بین مبدأ و مقصد قرار می‌گیرد. روش توسعه داده شده در مقایسه با روش ورتکس دارای این مزیت است که تنها با محاسبه ۵ جمله از کتاب نوریس در زمان بسیار کوتاه‌تر و تعداد محاسبات کمتر قادر خواهد بود نقاط چرخش روی مسیر دایره عظیمه را محاسبه کند.

واژگان کلیدی: مسیر، کوتاه‌ترین فاصله، نقاط چرخش، کتاب نوریس

۱. مقدمه

دانش جغرافیا و ناوبری در زمان مرکاتور (قرن شانزدهم میلادی) به دلیل شروع دریانوردی‌های بین‌قاره‌ای اهمیت یافته بود. تعدادی از کشورهای اروپایی شروع به اکتشاف جغرافیایی نموده و با استفاده از دریانوردی تجارت بین‌قاره‌ای گسترش پیدا کرده بود. عرض جغرافیایی به‌سادگی با اندازه‌گیری ارتفاع ستاره قطبی یا ارتفاع خورشید در ظهر قابل‌محاسبه است؛ ولی محاسبه طول جغرافیایی در آن زمان با پیچیدگی همراه بود و نیاز به اندازه‌گیری دقیق زمان بود. با توجه اینکه ساعت‌های آن زمان از دقت مناسب برخوردار نبودند بنابراین مسئله محاسبه طول جغرافیایی به یک چالش برای دریانوردان تبدیل شده بود (Katz, 2014).

یکی از راه‌های تعیین زمان در قرن شانزدهم این بود که از یک مکان با طول جغرافیایی مشخص، زمان ظهر محلی تعیین شده و می‌توان با مقایسه این دو زمان به عدم دقت در اندازه‌گیری زمان پی‌برد. البته این تکنیک دقیق نیست و فقط برای قرن شانزدهم کاربرد داشته است. لازم به ذکر است که هر ساعت دارای اختلاف طول جغرافیایی ۱۵ درجه‌ای است. عدم دسترسی به زمان دقیق در آن زمان سبب شد که وجود یک نقشه مناسب و دقیق ناوبری برای تعیین موقعیت در دریا بسیار مهم باشد زیرا بر اساس یک نقشه دقیق، دریانوردان می‌توانستند اختلاف فاصله بین دو مکان مشخص را محاسبه کنند و بفهمند که با چه راه و فاصله‌ای می‌توانند از یک نقطه به نقطه دیگر بروند.

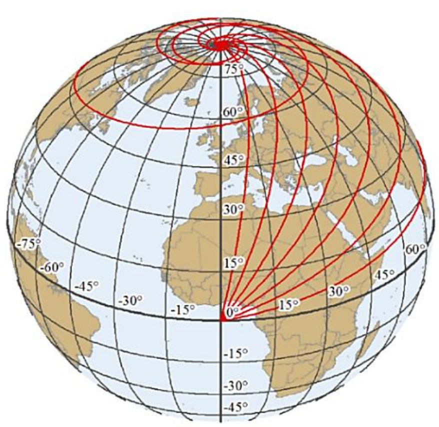
اولین نقشه بسیار ساده و با استفاده از خطوط عمود بر هم به‌عنوان مدارات و نصف‌النهارت ساخته شده بود که مقیاس بر روی مدارات و نصف‌النهارت یکسان بود (Katz, 2014). این نوع نقشه امروزه به تصویر صفحه‌ای کاری (plate carree projection) معروف است (Snyder and Voxland, 1989).

در شکل ۱-ج برای تأکید نشان داده شده است که چگونه نصف‌النهارت و مدارات نسبت به هم قرار گرفته‌اند. در متون قرن شانزده و هفده میلادی اسامی متفاوتی برای تصویر صفحه‌ای کاری ذکر شده است، برای مثال می‌توان اسامی نقشه صفحه‌ای دریایی یا نقشه معمولی دریایی یا نقشه‌ها عمومی یا کلی دریایی را ذکر کرد. یکی از معایب نقشه‌های آن زمان تولید انحراف در مسیر دریایی بود (Snyder and Voxland, 1989). این انحراف سبب شده دریانوردان تا یک عرض مورد نظر دریانوردی کرده و سپس با دریانوردی به سمت شرق یا غرب به نقطه مورد نظر می‌رسیدند؛ که این انحراف ناخواسته موجب افزایش زمان دریانوردی می‌شد (Katz, 2014). پدرونانس کشف کرد که یک خط با راه ثابت به‌صورت یک مارپیچ حول قطب می‌چرخد و او این خط را رامب‌لاین یا لوسودرم نامید. ضمناً او کشف کرد که این مسیر کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه نیست. در واقع کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه صفحه دایره عظیمه‌ای است که از دو نقطه عبور می‌کند. تنها مسیر لوسودرمی که دارای زاویه ۹۰ یا صفر درجه با استوا است می‌تواند کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه را ایجاد کند. یک مسیر لوسودرمی برای یک دریانورد بسیار مهم است زیرا خط واصل بین دو نقطه مبدأ و مقصد دارای زاویه راه ثابتی است و با دنبال کردن این مسیر می‌توان بدون هیچ انحرافی به مقصد رسید (Snyder, 1997).

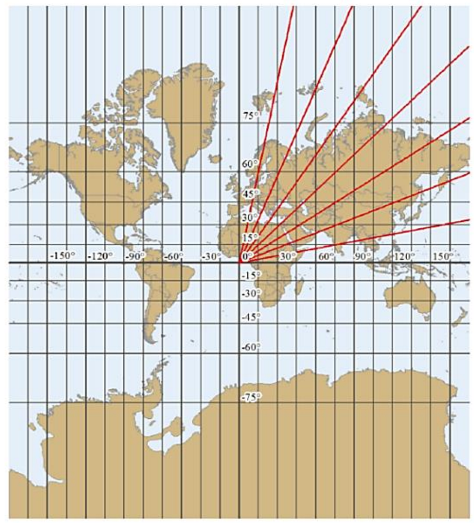
هر چند که مسیر لوسودرمی کشف شده ولی بدلیل اینکه در یک نقشه کاری مسیر دچار انحراف می‌باشد، بنابراین مسیرها قابل استفاده نبودند. اولین بار مرکاتور بود که توانست نقشه‌ای ایجاد کند که خطوط لوسودرم روی آن خطی صاف بود. در شکل ۱ هفت مسیر لوسودرمی بر روی شکل کروی زمین (شکل ۱- الف) و روی نقشه مرکاتور (شکل ۱- ب) و روی نقشه کاری (شکل ۱- ج) آورده شده است.

مسیر مناسب برای دریانوردی، مسیری است که دارای زاویه راه (زاویه بین مسیر کشتی و نصف‌النهارها) ثابت باشد. با تغییر زاویه راه روی نقشه مورداستفاده، رسیدن به مقصد دچار اختلال خواهد شد؛ بنابراین مسیر دایره عظیمه به دلیل تغییر مداوم زاویه راه برای دریانوردی مطلوب نیست. همان‌طور که در بالا عنوان شد، اولین بار مرکاتور در سال ۱۵۶۹ نقشه‌ای طراحی نمود که خطوط رسم شده برای مسیر کشتی دارای زاویه یکسان در طول مسیر بود (مسیر رامب لاین). امروزه این نقشه به نقشه مرکاتور معروف شده و برای مصارف دریانوردی استفاده می‌شود. مسیر دایره عظیمه روی نقشه مرکاتور یک منحنی است و خط صاف نمی‌باشد بنابراین رسم آن بر روی نقشه مرکاتور بدون اطلاع از نقاط میانی غیرممکن است. روش موردپذیرش برای دریانوردی روی دایره عظیمه بدین‌صورت است که نقاطی از دایره عظیمه انتخاب‌شده و مسیر رامب لاین بین نقاط انتخابی ترسیم می‌شود (Cutler, 2004).

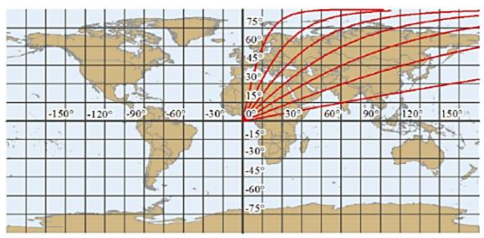
با ظهور رایانه‌ها و دستگاه‌های کمک ناوبری، حل مسائل ناوبری توسط رایانه‌ها مطرح گردید که از مهم‌ترین آن‌ها حل مسئله دایره عظیمه توسط رایانه است که باید الگوریتم مناسبی برای آن در نظر گرفته شود. حل دایره عظیمه با نقطه ورتکس، روش غیرمستقیم نامیده می‌شود؛ زیرا برای حل نقاط چرخش به عملیات اضافی برای یافتن نقطه ورتکس نیاز است؛ بنابراین محققان به دنبال روش‌های مستقیم بودند که نیاز به محاسبات کمتری داشته باشد.



الف) تصویر جهانی



ب) تصویر مرکاتور



ج) تصویر کاری

شکل ۱- خطوط لوسودرمی (خط قرمز) بر روی تصویر جهانی (الف)، تصویر مرکاتور (ب)، تصویر کاری (ج) (Vis, 2018).

Fig. 1- Loxodromes (red lines) visualized on the globe (a), on the Mercator projection (b) and on the Plate Carr´ee projection (c) (Vis, 2018).

روش‌های پیشنهادی برای حل رایانه‌ای مسیر دایره عظیمه به‌صورت زیر است:

الف) استفاده از نقطه عبور از استوا به‌جای نقطه ورتکس (Chen et al., 2004)

ب) استفاده از روش Meridian (Navy, 2008)

ج) استفاده از نقشه نئومونیک (Jofeh, 1981)

د) استفاده از روش‌های برداری (Nastro and Tancredi, 2010; Chen et al., 2014; Chen, 2016)

درروش‌های بالا الگوریتم مستقیم و سرعت محاسبات، مورد نظر محققان است. ولی چهار روش ذکر شده در بالا قابلیت استفاده در متون آموزشی را ندارد و نمی‌توانند به‌صورت عملی توسط یک دریانورد در حین نگهبانی پل فرماندهی استفاده شود. کاربرد روابط پیچیده ریاضی، فهم روش‌های کارآمد در حل مسئله دایره عظیمه را برای دریانوردان سخت نموده است. به همین دلیل روش محاسبه نقطه ورتکس همچنان به‌عنوان یک راهکار عملی در متون آموزشی ناوبری انتخاب می‌شود (Chen, 2016).

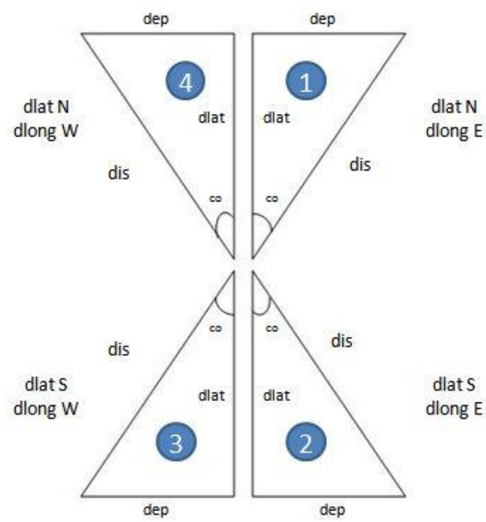
در ناوبری روی دایره عظیمه باید نقاط چرخش روی مسیر با استفاده از یک روش از چهار روش بالا محاسبه شده و سپس بین نقاط چرخش مسیر رامب لاین رسم و محاسبه شود. نکته مهم در دریانوردی اقیانوسی که از مسیر دایره عظیمه استفاده می‌کند تعیین نقاط چرخش است. در این پژوهش با استفاده از تکنیک مثلث‌های ترکیبی Hsieh et al. (2019) نقاط چرخش محاسبه شده و سپس با استفاده از روش ناوبری روی صفحه (صفحه زمین به‌صورت یک صفحه مسطح فرض شده و با استفاده از روابط مثلث قائم‌الزاویه راه و مسافت رامب لاین

بین نقطه مبدأ و مقصد محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است در روش ناوبری روی صفحه با عرض تصحیح شده، اثر انحناء زمین روی مسیر رامب لاین وارد می‌شود) زاویه راه و مسافت بین نقاط چرخش محاسبه می‌شود. در بخش بعدی اصول ریاضی مسیر رامب لاین و مسیر دایره عظیمه با روش مثلث‌های ترکیبی بیان شده و در ادامه با استفاده از روش مثلث‌های ترکیبی، روشی سریع برای محاسبات دایره عظیمه برای دریانوردان توسعه داده شده است.

۲. مواد و روش ها

در ابتدا لازم است مبانی ریاضی مسیر رامب لاین توضیح داده شده و در ادامه مبانی ریاضی مسیر دایره عظیمه بحث شود.

مسیریابی رامب لاین دریانوردی روی صفحه است که برای محاسبه راه و سرعت یک واحد شناور از یک عرض جغرافیایی به عرض دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. دلیل این‌که این نوع دریانوردی به دریانوردی صفحه معروف شده است، این است که کره زمین به‌صورت یک سطح صاف در نظر گرفته می‌شود لذا این نوع دریانوردی در مسافت طولانی (مسافت بیشتر از ۶۰۰ مایل) از دقت لازم برخوردار نیست و لازم است تصحیح‌های کروی بودن زمین روی مسئله انجام شود. برای حل دریانوردی روی صفحه از راه ربعی استفاده می‌شود. در شکل ۲ شکل‌های حاصل از راه ربعی آورده شده است.



شکل ۲- ربع‌های چهارگانه حاصل از زاویه راه
Fig. 2- The quadruplets obtained from the angle of the path

برای به دست آوردن ربع حرکت لازم است dlat (اختلاف عرض جغرافیایی بین نقاط مبدأ و مقصد) و dlong (اختلاف طول جغرافیایی بین نقاط مبدأ و مقصد) محاسبه شده و با توجه به علامت شمالی (N) و جنوبی (S) بودن dlat و شرقی (E) و غربی (W) بودن dlong، ربع حرکت تعیین می‌شود. برای مثال چنانچه dlat شمالی و dlong شرقی شود یعنی در ربع اول هستیم. برای حل زاویه راه و مسافت بین مبدأ و مقصد در روش دریانوردی روی صفحه از روابط مثلثاتی (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم.

$$\tan(co) = \frac{\text{dep}}{\text{dlat}} \Rightarrow$$
$$dep = dlong.cos\left(\frac{latA + latB}{2}\right) \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\cos(co) = \frac{dlat}{dis} \Rightarrow dis = dlat.\sec(co) \quad \text{رابطه (۲)}$$

در روابط (۱) و (۲)، dep مقدار کاهش فاصله روی مدار با افزایش عرض جغرافیایی، co زاویه راه، dis مسافت بین نقطه مبدأ (نقطه A) و مقصد (نقطه B) است. مراحل حل مسئله دریانوردی روی صفحه به شرح زیر است:

الف) با استفاده از موقعیت مبدأ و مقصد، مقدار $dlat$ و $dlong$ را تعیین می‌کنیم و بر اساس علامت آن‌ها، ربع حرکتی را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از عرض متوسط $latm = \left(latA + latB\right)/2$ مقدار dep را به دست می‌آوریم.

ج) با استفاده از روابط مثلثاتی مقدار راه ربعی و سرعت را محاسبه می‌کنیم.

د) با استفاده از علامت $dlat$ و $dlong$ راه به دست آمده را علامت‌گذاری می‌کنیم. برای مثال چنانچه راه به دست آمده ۴۲ درجه باشد، راه به‌صورت جدول ۱ علامت‌گذاری می‌شود.

برای مسافت‌های بیشتر از ۶۰۰ مایل دیگر نمی‌توان از عرض متوسط برای رابطه دیپارچر استفاده کرد. انجام این کار منجر به خطای زیادی در محاسبه مسیر خواهد شد. لذا در این حالت از عرض متوسط تصحیح شده (L) استفاده می‌شود. رابطه ۳ عرض متوسط تصحیح شده را نشان می‌دهد.

جدول ۱- مقدار راه ربعی، علامت dlong و علامت dlat

Table 1- the value of square way, dlong sign and dlat sign

علامت dlong	مقدار راه ربعی	علامت dlat
E	42	N

رابطه (۳)

$$\sec L = \frac{7915.7045}{dlat}\left[\log_{10}\tan\left(45+\frac{latB^{\circ}}{2}\right) - \log_{10}\tan\left(45+\frac{latA^{\circ}}{2}\right)\right]$$

با استفاده از رابطه ۴ می‌توان انحناء کره زمین را در ناوبری روی صفحه اعمال کرد و به نتایج دقیق‌تری دست یافت. در بالا روش ناوبری روی صفحه و تصحیح انحناء کره زمین آورده شد. با استفاده از این روابط می‌توان زاویه راه و مسافت رامب لاین بین نقطه مبدأ و مقصد را محاسبه کرد. در ادامه اصول مثلثات کروی برای رابطه بندی مثلث‌های ترکیبی کروی آورده می‌شود.

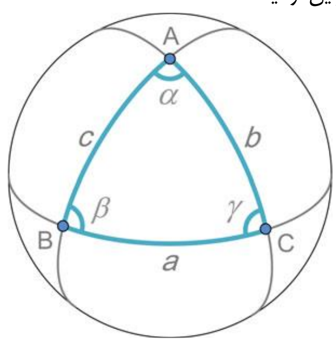
فرمول‌های مثلثات کروی به‌طور گسترده‌ای برای حل مسائل مختلف ناوبری مورد استفاده قرار می‌گیرند. بااین‌حال، این فرمول‌ها فقط روابط بین اضلاع و زوایای یک مثلث کروی را بیان می‌کنند. در واقع، بسیاری از مسائل ممکن است شامل انواع مختلفی از اشکال کروی باشد. اگر بتوانیم فرمول‌های مختلف را برای اشکال کروی خاص ایجاد کنیم، به ما کمک می‌کند تا مستقیماً این مسائل را حل کنیم.

فرمول‌های مثلثات کروی به‌طور گسترده‌ای برای حل مسائل مختلف هندسه کروی در زمینه‌های مختلف مانند ناوبری، هوانوردی، ژئودزی و نجوم استفاده می‌شود. فرمول‌های مثلثات کروی اصلی عبارتند از فرمول‌های مثلث کروی قائم‌الزاویه، فرمول‌های مثلث کروی ربع، قانون سینوس‌ها، قانون کسینوس‌ها برای اضلاع، قانون کسینوس‌ها برای زوایا، فرمول‌های نیم زاویه، فرمول‌های نیمه ضلعی، فرمول‌های چهاربخشی، فرمول‌های پنج‌بخشی، قیاس‌های دالامبر، قیاس‌های ناپیر، فرمول‌های کانولی و غیره. بسیاری از کتاب‌های درسی رویکردهای مختلفی را برای استخراج این فرمول‌ها ارائه کرده‌اند، به‌عنوان مثال: Smart et al. (1977) روش‌های هندسی برای قانون کسینوس‌ها ارائه کرده‌اند که این قانون را برای اضلاع مثلث کروی استخراج کنند. Green (1985) یک روش برداری را برای استخراج قانون کسینوس برای اضلاع مثلث کروی معرفی کرد. Murray (1900) از فرمول‌های مثلث کروی قائم‌الزاویه برای استخراج قانون کسینوس برای اضلاع استفاده کردند.

در واقع، این فرمول‌های مثلثات کروی همگی برای بیان روابط بین شش متغیر یک مثلث کروی استفاده می‌شوند. شش متغیر شامل سه ضلع a، bو c و سه زاویه α، β و γ هستند که در شکل ۳ نشان داده شده است. به‌عنوان مثال، روابط متغیر قانون کسینوس برای اضلاع، روابط متضاد بین سه ضلع و یک زاویه است. روابط متغیر رابطه چهارقسمتی (اثبات رابطه چهار قسمتی بدلیل اهمیت آن در این پژوهش در پیوست الف آورده شده است)، روابط مجاور بین دو ضلع و دو زاویه است. مزیت این فرمول‌ها این است که استفاده از آن‌ها راحت است. اگر متغیرهای داده شده با پیش شرط یک فرمول خاص مطابقت داشته باشند، متغیرهای مجهول را می‌توان مستقیماً با استفاده از آن فرمول به دست آورد. به‌عنوان مثال، هنگامی‌که دو ضلع و زاویه شامل آن‌ها داده می‌شود، ضلع سوم را می‌توان مستقیماً با استفاده از قانون کسینوس برای اضلاع به دست آورد.

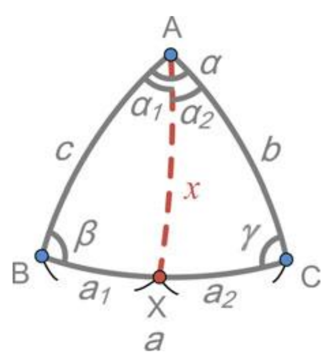
بااین‌حال، فرمول‌های مثلثات کروی فعلی فقط روابط بین اضلاع و زوایای یک مثلث کروی منفرد را بیان می‌کنند. بسیاری از مسائل ممکن است شامل انواع مختلفی از اشکال کروی مانند چهارضلعی کروی و چندضلعی‌های کروی باشد که با اتخاذ فرمول‌های مثلث کروی منفرد نمی‌توان آن‌ها را مستقیماً حل کرد؛ بنابراین رهیافت مثلث‌های کروی ترکیبی روشی مناسب برای حل مسیر دایره عظیمه است.

در مثلث کروی ترکیبی، مثلث کروی ممکن است از یک زاویه یا یک ضلع تقسیم شود همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است. در شرایط زاویه تقسیم شده، مثلث کروی (ABC) از زاویه α به دو مثلث کروی (ABX و AXC) تقسیم می‌شود. وقتی دو ضلع (c و b) و زوایای تقسیم شده (α، α1 و α2) داده می‌شود، زوایای دیگر (β و γ) را می‌توان با استفاده از فرمول چهارقسمتی به دست آورد و ضلع a را می‌توان با استفاده از قانون کسینوس برای اضلاع به دست آورد. بااین‌حال، هیچ‌یک از فرمول‌های مثلث کروی نمی‌تواند مستقیماً ضلع x (که ما آن را ضلع مشترک نامیده‌ایم) پیدا کند. به‌طور مشابه، در شرایط ضلع تقسیم شده داده شده، مثلث کروی (ABC) از ضلع a به دو مثلث کروی (ABX و AXC) تقسیم می‌شود. وقتی دو ضلع (c و b) و ضلع‌های تقسیم شده (a، a1 و a2) داده می‌شوند، هیچ‌یک از فرمول‌های مثلث کروی منفرد نمی‌توانند مستقیماً ضلع مشترک (x) را پیدا کنند؛ بنابراین فرمول مثلث کروی تقسیم شده را به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود.



شکل ۳- تصویر مثلث کروی منفرد (Hsieh et al. 2019).

Fig 3- Illustration of the single spherical triangle (Hsieh et al. 2019).



شکل ٤- تصویر مثلث کروی ترکیبی (Hsieh et al., 2019).

Fig 4- Illustration of the divided spherical triangle (Hsieh et al., 2019)

ابتدا فرمول‌های چهارقسمتی (پیوست الف) در دو مثلث کروی (ABC و ABX) در شکل ۴ اعمال می‌شود (Hsieh et al., 2019):

$$\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin c\cot b - \cos c\cos\alpha}$$ رابطه (۴)

$$\tan\beta = \frac{\sin\alpha_1}{\sin c\cot x - \cos c\cos\alpha_1}$$ رابطه (۵)

طرفین راست دو رابطه (۴) و (۵) با هم برابر قرار داده و فرمول مرتب شده حاصل به‌صورت رابطه (۶) می‌باشد که با ضرب صورت و مخرج کسر بالا رابطه (۷) حاصل می‌شود.

طرفین رابطه (۷) را بر sin c تقسیم می‌کنیم (رابطه ۸) و رابطه (۷) را به‌صورت رابطه (۹) بازنویسی می‌کنیم. با توجه به رابطه (۱۰)، رابطه (۱۱) و در نهایت رابطه (۱۲) حاصل می‌شود.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin c\cot b - \cos c\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin c\cot x - \cos c\cos\alpha_1}$$ رابطه (۶)

$$\sin\alpha\sin c\cot x - \sin\alpha\cos c\cos\alpha_1 = \sin\alpha_1\sin c\cot b - \sin\alpha_1\cos c\cos\alpha$$ رابطه (۷)

$$\sin\alpha\cot x - \sin\alpha\cot c\cos\alpha_1 = \sin\alpha_1\cot b - \sin\alpha_1\cot c\cos\alpha$$ رابطه (۸)

$$\sin\alpha\cot x = \cot c\left(\sin\alpha\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha\right) + \sin\alpha_1\cot b$$ رابطه (۹)

$$\sin\left(\alpha_2\right) = \sin\left(\alpha - \alpha_1\right) = \sin\alpha\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha$$ رابطه (۱۰)

$$\sin\alpha\cot x = \cot c\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cot b$$ رابطه (۱۱)

$$\tan x = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1\cot b + \sin\alpha_2\cot c}$$ رابطه (۱۲)

سپس قانون کسینوس را برای اضلاع دو مثلث کروی (ABC و ABX) در شکل ۴ را نوشته و مرتب می‌کنیم،

سپس طرفین رابطه (۱۳) و (۱۴) را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos c\cos a}{\sin c\sin a}$$ رابطه (۱۳)

$$\cos\beta = \frac{\cos x - \cos c\cos a_1}{\sin c\sin a_1}$$ رابطه (۱۴)

$$\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a}=\frac{\cos x-\cos c\cos a_1}{\sin c\sin a_1}$$
رابطه (۱۵)

عبارت sinc از طرفین رابطه (۱۵) حذف شده و طرفین کسر را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\sin a_1\cos b-\sin a_1\cos c\cos a=\sin a\cos x-\sin a\cos c\cos a_1$$
رابطه (۱۶)

رابطه (۱۶) را به‌صورت رابطه (۱۷) بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin a\cos x=\cos c\left(\sin a\cos a_1-\sin a_1\cos a\right)+\sin a_1\cos b$$
رابطه (۱۷)

از اتحاد (رابطه ۱۸) استفاده می‌کنیم؛ که رابطه (۱۹) حاصل می‌شود:

$$\sin a_2=\sin\left(a-a_1\right)=\sin a\cos a_1-\sin a_1\cos a$$
رابطه (۱۸)

$$\sin a\cos x=\cos c\sin a_2+\sin a_1\cos b$$
رابطه (۱۹)

که در نهایت از رابطه (۱۹) می‌توان رابطه (۲۰) را به دست آورد:

$$\cos x=\frac{\sin a_1\cos b+\sin a_2\cos c}{\sin a}$$
رابطه (۲۰)

بر اساس روابط (۱۲) و (۲۰) می‌توان نقاط میانی روی مسیر دایره عظیمه را محاسبه کرد. بر اساس رابطه (۱۲) می‌توان اختلاف طول جغرافیایی بین نقاط چرخش و نقطه مبدأ را ملاک قرار داده و زاویه dlongAx را برابر با زاویه α_1 قرار داده و از طرف دیگر نیز زاویه dlongxB را نیز برابر با زاویه α_2 قرار داده و بر اساس اختلاف طول جغرافیایی نقاط میانی را حل کرد.

در رهیافت دوم می‌توان فاصله بین نقاط مبدأ و مقصد را ملاک قرار داده و از رابطه (۲۰) استفاده کرد. برای استفاده از رابطه (۲۰) لازم است مسافت دایره عظیمه بین مبدأ و مقصد را محاسبه کرد (disAB=a). سپس بر مبنای فاصله بین نقطه مبدأ و نقطه چرخش ($disAx=a_1$) و فاصله بین نقطه چرخش تا نقطه مقصد ($disxB=a_2=a-a_1$) طول و عرض نقطه چرخش را تعیین کرد. بر اساس دو رهیافت ذکر شده می‌توان مختصات نقطه چرخش را تعیین کرد که در ادامه این دو رهیافت در غالب یک برنامه رایانه‌ای ارائه شده و در نهایت با استفاده از دو رابطه (۱۲) و (۲۰) دو رابطه جدید برای محاسبه سریع دستی توسعه داده خواهد شد.

۳. بحث و نتیجه

در این پژوهش برای محاسبه موقعیت نقاط میانی از روش Hsieh et al. (2019) استفاده شده است. مبانی ریاضی این روش در بخش قبلی توضیح داده شد. در این قسمت کاربرد مبانی ریاضی مثلثات ترکیبی برای محاسبه موقعیت نقاط میانی آورده می‌شود.

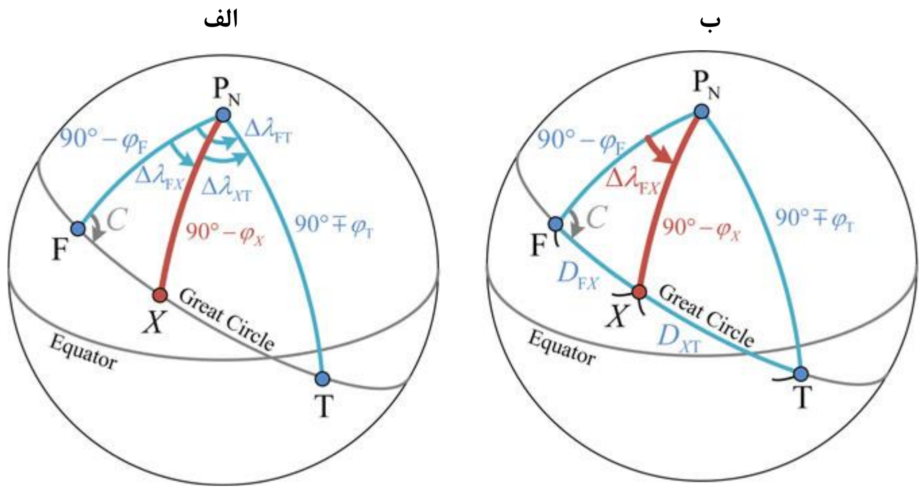
در بخش قبلی از نماد A و B به‌عنوان نقاط پیرامونی مثلث کروی استفاده شده در این بخش مثلث کروی برای حل مسئله دایره عظیمه به کار گرفته شده است. لذا از نماد F به‌عنوان موقعیت مبدأ و T به‌عنوان نقطه مقصد استفاده شده است تا تمایز بین این دو حالت ایجاد شود. هنگامی‌که موقعیت نقطه عزیمت (F) و نقطه مقصد (T) داده می‌شود، عرض جغرافیایی نقطه عزیم (φF)، اختلاف طول جغرافیایی بین نقطه عزیمت و نقطه مقصد (λFT) و عرض جغرافیایی نقطه مقصد (φT) مشخص خواهد شد. ناوبری روی نقاط میانی که در مسیر دایره عظیمه از نقطه عزیمت تا نقطه مقصد قرار دارند، می‌تواند مسافت

کمتری را ایجاد کند؛ بنابراین، مسئله اصلی مسیر دایره عظیمه، به دست آوردن موقعیت نقاط میانی است. دو نوع شرط وجود دارد:

الف) اولین مورد تفاوت طول جغرافیایی بین نقطه عزیمت و نقطه میانی (λFX) داده شده است تا عرض جغرافیایی نقطه میانی (φX) محاسبه شود (شکل ۵–الف).

ب) فاصله دایره عظیمه از نقطه عزیمت تا نقطه چرخش (DFX) و فاصله دایره بزرگ از نقطه چرخش تا نقطه مقصد (DXT) داده می‌شود تا عرض جغرافیایی نقطه بین مسیر (φX) و اختلاف بین طول جغرافیایی بین نقطه عزیمت و نقطه مبدأ (λFX) همان‌طور که در شکل ۵–ب نشان داده شده است، محاسبه شود.

این دو پیش‌شرط قابل انطباق بر مثلث کروی منفرد نیست اما می‌توان با استفاده از فرمول‌های مثلث کروی تقسیم شده این پیش‌شرط‌ها را بر مسئله اعمال نموده و نقاط چرخش را محاسبه کرد.



شکل ۵- یافتن نقاط بین مسیر دایره عظیمه (Hsieh et al., 2019).

Fig. 5- Find the points between the paths of the great circle (Hsieh et al., 2019).

با استفاده از اولین شرط که مقدار اختلاف طول جغرافیایی بین نقطه مبدأ تا نقطه چرخش ($\Delta\lambda_{FX}$) به‌عنوان معلوم یا ورودی مسئله فرض شده و با استفاده از رابطه (۱۲) می‌توانیم به‌طور مستقیم عرض جغرافیایی نقطه چرخش (φX) را بدست آوریم.

در رابطه (۲۱) $\Delta\lambda_{FT}$ اختلاف طول جغرافیایی بین مبدأ و مقصد و $\Delta\lambda_{FX}$ اختلاف طول جغرافیایی بین نقطه چرخش تا مقصد است (شکل ۵–الف).

در شرط دوم، با استفاده از معادله (۲۰) می‌توانیم به‌طور مستقیم عرض جغرافیایی نقطه چرخش (φX) را بدست آوریم (شکل ۵–ب):

سپس با استفاده از قانون کسینوس می‌توان اختلاف طول بین نقطه عزیمت و نقطه چرخش (λFX) را بدست آورد و آن را به طول جغرافیایی نقطه چرخش (λX) تبدیل کرد (شکل ۵–ب).

$$\tan\varphi_X = \frac{\sin\Delta\lambda_{FX}\ \tan\varphi_T + \sin\Delta\lambda_{XT}\ \tan\varphi_F}{\sin\Delta\lambda_{FT}}$$ رابطه (۲۱)

$$\sin\varphi_X = \frac{\sin D_{FX}\ \sin\varphi_T + \sin D_{XT}\ \sin\varphi_F}{\sin D_{FT}}$$ رابطه (۲۲)

$$\cos\Delta\lambda_{FX} = \frac{\cos D_{FX} - \sin\varphi F\ \sin\varphi X}{\cos\varphi F\ \cos\varphi X}$$ رابطه (۲۳)

در ادامه لازم است دو شکل کلی حل مسئله با پیش فرض معلوم بودن اختلاف طول جغرافیایی نقطه چرخش با مبدأ (رابطه ۱۱) و پیش فرض معلوم بودن فاصله نقطه مبدأ تا نقطه چرخش روی مسیر دایره عظیمه (رابطه ۱۲ و ۱۳) با انجام حل عددی مورد مقایسه قرار گیرند.

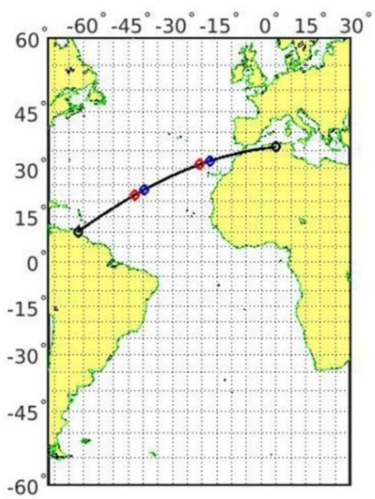
لذا در ادامه این دو شکل کلی حل مسئله با حل عددی مسیر دایره عظیمه برای نقاط زیر مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. شکل ۶ و شکل ۷ نقاط چرخش بر روی مسیر دایره عظیمه با استفاده از روش Hsieh et al. (2019) را نشان می دهد.

رابطه (۲۴) الف:

$$F = \begin{cases} 36^\circ & N \\ 005^\circ & W \end{cases},\ T = \begin{cases} 10^\circ & N \\ 062^\circ & W \end{cases}$$

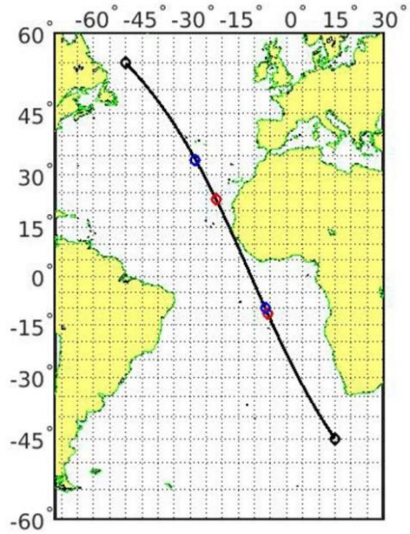
ب:

$$F = \begin{cases} 45^\circ & S \\ 15^\circ & E \end{cases},\ T = \begin{cases} 55^\circ & N \\ 50^\circ & W \end{cases}$$



شکل ٦- مسیر دایره عظیمه و نقاط چرخش برای نقطه الف در رابطه ١٤، نقاط آبی، نقاط چرخش با استفاده از پیش فرض معلوم بودن اختلاف طول جغرافیایی نقطه چرخش با مبدأ و نقاط قرمز، نقاط چرخش با استفاده از پیش فرض معلوم بودن فاصله نقطه مبدأ تا نقطه چرخش

Fig. 6- great circle path and points of rotation for point A in relation 14, blue points, points of rotation using the default Finding the difference in longitude of the turning point with the origin and red points, turning points using the default knowing the distance from the starting point to the rotation point



شکل ۷- مسیر دایره عظیمه و نقاط چرخش برای نقطه ب در رابطه ۱۴، نقاط آبی، نقاط چرخش با استفاده از پیش فرض معلوم بودن اختلاف طول جغرافیایی نقطه چرخش با مبدأ و نقاط قرمز، نقاط چرخش با استفاده از پیش فرض معلوم بودن فاصله نقطه مبدأ تا نقطه چرخش

Fig. 7- great circle path and points of rotation for point B in relation 14, blue points, points of rotation using the default Finding the difference in longitude of the turning point with the origin and red points, turning points using the default knowing the distance from the starting point to the rotation point

در بالا دو شکل کلی حل مسئله دایره عظیمه بر اساس روش Hsieh et al. (2019) آورده شده است. قابل به ذکر می‌باشد که در شکل‌های ۶ و ۷ اگر عرض نقطه مبدأ با عرض نقطه چرخش یکی در نظر گرفته می‌شد دایره‌های آبی و قرمز بر روی هم قرار گرفته می‌شدند. این روش تنها با استفاده از رایانه قابل اجرا است. یکی از معضلات دریانوردان در دریا این است که چنانچه در دریا مجبور به محاسبه دستی نقاط چرخش روی مسیر دایره عظیمه شوند ناچارند از روش ورتکس استفاده کنند که در مقاله Mohammadi et al. (2021) چالش‌های روش ورتکس بحث شده است؛ لذا در این پژوهش بر اساس روش Hsieh et al. (2019) روش مستقیم برای حل نقاط میانی روی مسیر دایره عظیمه با استفاده از کتاب نوریس (کتاب دارای جداول لگاریتم برای محاسبه روابط مثلثاتی توسط دریانوردان بدون نیاز به ماشین حساب) توسعه داده شده است. روش توسعه داده شده دارای این مزیت است که در زمان بسیار کوتاه‌تر و تعداد محاسبات کمتر قادر خواهد بود نقاط چرخش روی مسیر دایره عظیمه را محاسبه کند. این روش در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد.

با استفاده از رابطه (۲۱) می‌توان موقعیت نقطه دلخواه X را بر روی مسیر دایره عظیمه محاسبه نمود. به‌منظور ساده‌سازی و افزایش کارایی رابطه (۲۱)، فرض زیر برای مسئله پذیرفته می‌شود (رابطه ۲۵):

رابطه (۲۵)

$$Dlong\,(XT\,) = Dlong\,(FX\,) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Dlong(FT)}$$

فرض بالا بدین مفهوم است که اختلاف جغرافیایی برای کمان FX نصف کمان FT می‌باشد. این فرض بدان معنی نیست که نقطه X در وسط مسیر دایره عظیمه قرارگرفته است. این بدان مفهوم است که نقطه چرخش دارای اختلاف‌های طول جغرافیایی مساوی با مبدأ و مقصد است. البته اگر دایره عظیمه بر یک مدار منطبق گردد (راه اولیه ۹۰ درجه باشد) فرض شماره (۲۵) به معنی قرار گرفتن نقطه X در وسط مسیر FT است. فرض (۲۵) را برای اختلاف طول جغرافیایی (FT) جایگزین می‌کنیم (رابطه ۲۶).

$$\mathrm{tg}\left(lat\ X\right)=\frac{\sin\left(DlongXT\right)tg\ \left(lat\ F\right)+\sin(Dlong\ XT\ )\,\mathrm{tg}(lat\,T\ )}{\sin\left(2Dlong\ XT\ \right)}$$ رابطه (۲۶)

مخرج رابطه (۲۶) را با رابطه (۲۷) ساده می‌کنیم:

$$sin(2\alpha)=2sin(\alpha)\,cos(\alpha)$$ رابطه (۲۷)

با استفاده از رابطه (۲۷) در رابطه (۲۶)، رابطه (۲۸) ایجاد می‌شود:

$$\mathrm{tg}\left(lat\ X\ \right)=\frac{\sin\left(DlongXT\ \right)[tg\ \left(lat\ F\ \right)+\mathrm{tg}(lat\,T\ )]}{2\sin\left(Dlong\ XT\ \right)\cos(Dlong\ XT\ )}$$ رابطه (۲۸)

با ساده کردن رابطه (۲۸) رابطه نهایی (۲۹) حاصل می‌شود:

$$\mathrm{tg}\left(latW\ \right)=\frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{lat\ F}\right)+\mathrm{tg(latT)}}{2\cos(Dlong\ FW\ )}$$ رابطه (۲۹)

رابطه (۲۹) رابطه ساده و سریع برای مصارف محاسباتی است. پس از محاسبه نقطه X دو کمان FX و XT داریم که با استفاده از رابطه (۲۹) هرکدام از این کمان‌ها را می‌توان به دو کمان متناظر تقسیم کرد و با استفاده از این الگوریتم می‌توانیم به‌سادگی یک مسیر دایره عظیمه را به تعداد دلخواه با اختلاف طول‌های یکسان تقسیم کرد. در ادامه از رابطه (۱۹) برای مصارف عملی در تقسیم مسیر دایره‌ای عظیمه در محاسبات دستی استفاده می‌شود.

هدف از انجام این پژوهش توسعه روش مسیریابی در محاسبات دستی برای واحدهای شناور در دریانوردی اقیانوسی است. رابطه (۲۹) برای مسیریابی واحد شناور در دریانوردی اقیانوسی قابل استفاده است.

در شکل‌های (۶) و (۷)، رابطه‌های (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) توسط رایانه حل شده و دو حالت مسیریابی در اقیانوس اطلس نشان داده شد.

در ادامه لازم است رابطه (۲۹) برای افسران نگهبان پل فرماندهی که وقت زیادی برای محاسبه روابط ندارند، تطبیق داده شود. مشکل رابطه (۲۹) این است که با استفاده از جداول نوریس قابل‌محاسبه نیست. دلیل این امر نیز وجود عملگر جمع در صورت کسر رابطه (۲۹) است. به همین دلیل لازم است از روابط مثلثاتی استفاده شده و عملگر جمع در صورت کسر تبدیل به عملگر ضرب شود. برای این کار با استفاده از رابطه زیر حاصل جمع دو کمان تانژانت را به حاصل ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\mathrm{tg}\left(latF+latT\ \right)=\frac{\sin(latF+latT\ )}{\cos(latF\ )\ \cos(latT\ )}$$ رابطه (۳۰)

با قرار دادن رابطه (۳۰) در رابطه (۲۹) رابطه (۳۱) به دست می‌آید:

$$\mathrm{tg}\left(lat\ X\ \right)=\frac{\sin(latF+latT\ )}{2\cos(Dlong\ FX\ )\cos(latF\ )\cos(latT\ )}$$ رابطه (۳۱)

برای ساده کردن رابطه (۳۱) می‌توان از رابطه (۳۲) استفاده کرد:

$$\sin(latF + latT) = 2\sin(\frac{latF + latT}{2})\cos(\frac{latF + latT}{2})$$ رابطه (۳۲)

سپس با توجه به رابطه ۳۳، رابطه (۳۴) حاصل می‌شود:

$$Meanlat = \frac{latF + latT}{2}$$ رابطه (۳۳)

$$\mathrm{tg}\left(lat\ X\right) = \frac{\sin(Meanlat)\cos(Meanlat)}{\cos(Dlong\ FX)\cos(latF)\cos(latT)}$$ رابطه (۳۴)

رابطه (۳۴) را می‌توان با استفاده از کتاب نوریس در پل فرماندهی حل کرد؛ بنابراین این رابطه به‌راحتی توسط افسر نگهبان در پل فرمانده قابل استفاده است. بدلیل راحتی استفاده از این رابطه افسر نگهبان می‌تواند در حین نگهبانی مسیریابی اقیانوسی واحد شناور را حل کند.

در ادامه مثال عددی نقطه الف در رابطه (۲۴) با استفاده از کتاب نوریس حل شده تا روش حل دایره عظیمه توسط افسر نگهبان با کتاب نوریس شبیه‌سازی شود. در نقطه الف در رابطه (۲۴) واحد شناور از نقطه ۳۶ درجه شمالی و ۵ درجه غربی به مقصد ۱۰ درجه شمالی و ۶۲ درجه غربی عزیمت می‌کند، افسر نگهبان پل فرماندهی ملزم به محاسبه نقاط چرخش روی مسیر دایره عظیمه است. با استفاده از طول و عرض نقاط مبدأ و مقصد مقادیر Meanlat و dlong را محاسبه می‌کنیم (رابطه ۳۵):

$$dlong = \left(lonT - lonF\right)/2 = \left(062^\circ\ W - 005^\circ\ W\right)/2 = 028^\circ\ 30'\ W$$ رابطه (۳۵)

$$meanlat = \frac{latF + latT}{2} = \frac{10+36}{2} = 23^\circ\ N$$

برای حل رابطه (۳۴) با استفاده از کتاب نوریس باید از طرفین رابطه لگاریتم بگیریم (رابطه ۳۶):

$$\log(\mathrm{tg}\left(lat\ X\right)) = \log(\sin(Meanlat)\cos(Meanlat)) - \log(\cos(Dlong\ FX)\cos(latF)\cos(latT))$$ رابطه (۳۶)

با ساده‌سازی رابطه (۳۶) داریم (رابطه ۳۷):

$$\log(\mathrm{tg}\left(lat\ X\right)) = \log(\sin(Meanlat)) + \log(\cos(Meanlat)) - \log(\cos(Dlong\ FX)) - \log(\cos(latF)) - \log(\cos(latT))$$ رابطه (۳۷)

بنابراین برای حل رابطه بالا با استفاده از کتاب نوریس لازم است افسر نگهبان ۵ مقدار سمت راست رابطه (۳۷) را از کتاب نوریس استخراج کند که با جایگذاری رابطه بالا داریم (رابطه ۳۸):

رابطه (۳۸)

$$\log(\mathrm{tg}(latW)) = \log(\sin(23)) + \log(\cos(23)) - \log(\cos(28^\circ\ 30')) - \log(\cos(10)) - \log(\cos(36))$$

با استخراج مقادیر فوق از کتاب نوریس داریم:

رابطه (۳۹)

$$\begin{array}{rr} & \log(\sin(23)) = \bar{1}.59188 \\ + & \underline{\log(\cos(23)) = \bar{1}.96403} \\ & \bar{1}.55591 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlr} & \log(\cos(28^\circ\ 30')) & = \bar{1}.94390 \\ + & \log(\cos(10)) & = \bar{1}.99335 \\ + & \underline{\log(\cos(36))} & \underline{= \bar{1}.90796} \\ & & \bar{1}.84521 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \bar{1}.55591 \\ - & \underline{\bar{1}.84521} \\ & \bar{1}.71070 \end{array}$$

$$\log(tg(latX)) = \bar{1}.71070 \Rightarrow latX = 27^\circ\ 11.3'\ N$$

$$lonwX = lonF + dlongFX = 5 + 28^\circ\ 30' = 33^\circ\ 30'$$

در ادامه با استفاده از روش نقطه ورتکس نقطه الف در رابطه ۳۴ حل می‌شود:

رابطه (۴۰)

$$\hat{P} = dlong_{F,T} \quad \begin{cases} long\ F = 005^\circ\ W \\ long\ T\ =\ 062^\circ\ W \end{cases}, \begin{cases} lat\ F = 36^\circ\ N \\ lat\ T\ =\ 10^\circ\ N \end{cases}$$

$$dlong\ =\ 057^\circ \qquad dlat\ =\ 026^\circ$$

$$PF = colat\ F = 54^\circ$$

$$PT = colat\ T = 80^\circ$$

$$FT = dis_{F,T}$$

با استفاده از رابطه هاورساین برای مثلث کروی مقدار مسافت بین دو نقطه مبدأ و مقصد به صورت رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود (Mohammadi et al., 2021).

رابطه (۴۱)

$$hav\ dis_{F,T} = hav\ (dlat) + hav\ (dlong) \times \sin colatF \times \sin colatT$$

$$hav\ dis_{F,T} = hav\ (dlat) + hav\ (dlong) \times \cos latF \times \cos latT$$

$$\log X = \log hav\ (dlong) + \log \cos latF + \log \cos latT$$

با استفاده از کتاب نوریس می‌توان جمله‌های رابطه بالا را محاسبه کرد:

$$\log hav(dlong) = \log hav\, 057° = \bar{1}.35733$$

$$\log \cos lat\ F = \log \cos lat\ 36° = \bar{1}.90796$$

$$\log \cos lat\ T = \log \cos lat\ 10° = \bar{1}.99335$$

$$\log X = = \bar{1}.25864 \quad nat = = \bar{0}.18140$$

$$hav(dlat) = hav\, 26° = \bar{0}.05060$$

$$\begin{array}{r} 0.05060 \\ +0.18140 \\ \hline 0.23200 \Rightarrow nat = 57^{\circ}\ 35.3' \end{array}$$

$$dis_{F,T} = 57^{\circ}\ 35.3' = 3455.3\,miles$$

با استفاده از رابطه هاورساین می‌توان راه اولیه را به صورت زیر محاسبه کرد (Mohammadi et al., 2021):

$$hav\ \hat{A} = \left[hav\ (colatT) - hav\ (dis - colatF)\right] \times \csc dis \times \csc colatF \qquad \text{رابطه (۴۲)}$$

زاویه $\hat{A}$ راه اولیه در مسیر دایره عظیمه است:

$$X = hav\,(\mathrm{co}\,lat\,T) - hav\,(dis - colatF)$$

$$hav\,(\mathrm{co}\,lat\,T) = hav\,(80^{\circ}\ 00') = 0.41318$$

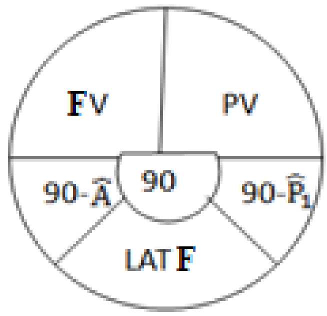
$$hav\,(dis - colatF) = hav\ (03^{\circ}\ 35.3') = 0.00098$$

$$\log X = \bar{1}.61511 \quad X = 0.41220$$

$$\begin{array}{r} \log X = \bar{1}.61511 \\ +\log \csc\ 57^{\circ}\ 35.3' = 0.07355 \\ +\log \csc\ 54^{\circ}\ 00.0' = 0.09204 \\ \hline \bar{1}.78070 \end{array}$$

$$\log hav\,\hat{A} = \bar{1}.78070 \quad \hat{A} = 101^{\circ}\ 57.0'$$

برای حل نقطه ورتکس (نقطه V) لازم است دایره نپیر برای مثلث کروی قائم الزاویه نقطه مبدأ، ورتکس ترسیم شود. در شکل ۸ دایره نپیر آورده شده است (Mohammadi et al., 2021).



شکل ۸- دایره نپیر برای حل عرض جغرافیایی نقطه ورتکس

Fig 8- Napier circle to solve the latitude of the vertex point

که

$$\hat{P}_1 = dlong_{F,V}\ ,\ FV = dis_{F,V}\ ,\ PV = colatV\ ,\quad \hat{A} = 101^{\circ}\ 57.4'$$

در رابطه بالا PV متمم عرض جغرافیایی ورتکس است که با استفاده از دایره نپیر در شکل ۸ می‌توان رابطه نپیر بین عناصر دایره را برقرار کرد، که در اینجا از رابطه سینوس یک عنصر برابر است با حاصل ضرب دو عنصر متضاد (هر عنصر در دایره نپیر دارای دو عنصر همسایه و دو عنصر متضاد است) استفاده شده است:

$$\sin PV = \cos(90-\hat{A}) \times \cos(latT) = \sin(101.95^{\circ}) \times \cos(36^{\circ})$$ رابطه (۴۳)

موارد رابطه بالا توسط کتاب نوریس به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{array}{r} \log \sin(101^{\circ}\ 57.4') = \bar{1}.99048 \\ +\log\cos\ 36^{\circ}\ 00.0' = \bar{1}.90796 \\ \hline \log\sin PV = \bar{1}.89844 \end{array}$$

☞ $\log\sin PV = \bar{1}.89844$ ☞ $PV = 52^{\circ}\ 19.4'$ ☞ $latV = 37^{\circ}\ 40.6'\ N$

$$\sin latT = \tan(90-\hat{A}) \times \tan(90-\hat{P}_1)$$

☞ $$\frac{1}{\tan(90-\hat{P}_1)} = \tan(90-\hat{A}) \times \frac{1}{\sin latA}$$

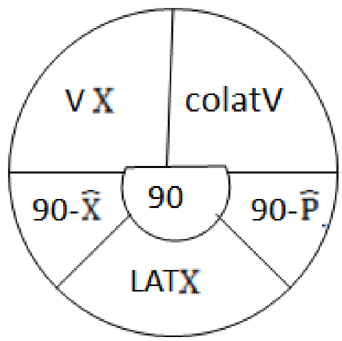
$$\tan(\hat{P}_1) = \cos ec(latT)cotan(T)$$

$$\log\tan(\hat{P}_1) = \log(\text{cosec}\,36^{\circ}) + \log(\text{cotan}\ 101^{\circ}\ 57.0')$$

$$
\begin{array}{lr}
\log(\operatorname{cosec} 36^{\circ}) & = 0.23078 \\
+\log(\operatorname{cotan} 101^{\circ}\ 57.0') & = \underline{\bar{1}.32561} \\
 & \bar{1}.55639
\end{array}
$$

$$\hat{P}_1 = 19^{\circ}\ 48.1' \qquad longV = 14^{\circ}\ 48.1' E$$

با استفاده از دایره نپیر (شکل ۹) می‌توان عرض نقطه چرخش را محاسبه کرد:



شکل ۹- دایره نپیر برای حل عرض جغرافیایی نقطه چرخش

Fig. 9- Napier circle to solve the latitude of the rotation point

$$\hat{P}_1 = DLo_{VX} =$$

$$\frac{DLo_{FT}}{2} + DLo_{FV} =$$

$$\frac{57}{2} + 19^{\circ}\ 48.1' = 48^{\circ} 18.1' \quad X = \begin{cases} ???^{\circ} & ??' \quad N \\ 33^{\circ} & 30' \quad W \end{cases}$$

$$PV = 52^{\circ}\ 19.4'$$

$$\sin(90 - \hat{P}) = \tan(PV) \times \tan(latX)$$

$$\tan(latX) = \cos(DLo_P) \times \tan(latV)$$

$$
\begin{array}{lr}
\log\ \cos(48^{\circ} 18.1') & = \bar{1}.82296 \\
+\log\ \tan(37^{\circ}\ 40.6') & = \bar{1}.88759 \\
\hline
\log \tan(latX) & = \bar{1}.71055
\end{array}
\qquad latX = 27^{\circ}\ 10.9'\ N
$$

$$X = \begin{cases} 27^{\circ} & 10.9' \quad N \\ 33^{\circ} & 30' \quad W \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای حل مسئله از روش ورتکس هم مسیر طولانی‌تر و هم محاسبات بیشتری نیاز است تا به نقطه ورتکس برسیم و پس از آن نیاز است محاسبه‌های مربوط به نقطه چرخش را انجام بدهیم که حجم محاسبات بسیار افزایش پیدا می‌کند.

درنتیجه این محاسبات ۰/۲ دقیقه خطای گرد کردن مربوط به کتاب نوریس می‌باشد که برای محاسبه نقطه چرخش ایجاد می‌شود.

٤. نتیجه‌گیری کلی

دایره عظیمه به‌عنوان کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در دریانوردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مسیر دایره عظیمه روی نقشه مرکاتور یک منحنی است و خط صاف نمی‌باشد بنابراین رسم آن بر روی نقشه مرکاتور بدون اطلاع از نقاط میانی غیرممکن است. روش موردپذیرش برای دریانوردی روی دایره عظیمه بدین‌صورت است که نقاطی از دایره عظیمه انتخاب‌شده و مسیر رامب لاین بین نقاط انتخابی ترسیم می‌شود. در ناوبری روی دایره عظیمه باید نقاط چرخش روی مسیر با استفاده از روش‌های موجود محاسبه شده و سپس بین نقاط چرخش مسیر رامب لاین رسم و محاسبه شود. نکته مهم در دریانوردی اقیانوسی که از مسیر دایره عظیمه استفاده می‌کند تعیین نقاط چرخش است. اکثر روش‌ها قابلیت استفاده در متون آموزشی را ندارد و نمی‌توانند به‌صورت عملی توسط یک دریانورد در حین نگهبانی پل فرماندهی استفاده شود. برای حل مسئله از روش ورتکس هم مسیر طولانی‌تر و هم محاسبات بیشتری نیاز است تا به نقطه ورتکس برسیم و پس از آن نیاز است محاسبه‌های مربوط به نقطه چرخش را انجام بدهیم که حجم محاسبات بسیار افزایش پیدا می‌کند در این پژوهش با استفاده از روش مثلث‌های ترکیبی، مسیر دایره عظیمه مورد حل قرار گفته است و دو روش کلی برای محاسبه نقاط چرخش دایره عظیمه که شامل الف) محاسبه نقطه چرخش با اختلاف طول جغرافیایی مساوی و ب) محاسبه نقطه چرخش با اختلاف فاصله مساوی استفاده شده است. در ادامه با استفاده از روش اختلاف طول جغرافیایی مساوی در محاسبه نقاط چرخش یک رابطه سریع و مطمئن برای محاسبه نقاط چرخش توسعه داده شده است. پیش فرض روش توسعه داده شده این است که نقطه چرخش همواره در منصف اختلاف طول جغرافیایی بین مبدأ و مقصد قرار می‌گیرد. روش توسعه داده شده تنها با محاسبه ۵ جمله از کتاب نوریس می‌تواند عرض نقطه چرخش را محاسبه کند.

در روش جدید بدست آمده مشاهده می‌شود که افسر نگهبان پل فرماندهی تنها با محاسبه ۵ جمله از کتاب نوریس موفق به محاسبه یک نقطه چرخش بین مسیر مبدأ تا مقصد شده است. این روش از دو منظر قابل توجه و مفید است:

الف) محاسبه طول و عرض نقطه چرخش بسیار ساده شده و نیازی به محاسبات طولانی نقطه ورتکس نیست؛ و مختصات نقطه چرخش به‌صورت مستقیم حل شده است.

ب) هیچ‌گونه شکی در صحت محاسبات وجود ندارد و نتیجه به دست آمده کاملاً بر واقعیت منطبق است و افسر نگهبان نیازی به هیچ‌گونه استدلال اضافی برای محاسبه نقطه چرخش ندارد.

با توجه به رابطه تعریف شده، افسران نیروی دریایی جمهوری اسلامی ایران که به دریانوردی اقیانوسی اعزام می‌شوند، دیگر نیازی به محاسبه نقاط میانی مسیر از طریق روش ورتکس برای مسیریابی در اقیانوس را ندارند و به‌راحتی می‌توانند با استفاده از این رابطه نقاط چرخش روی مسیر دایره عظیمه را محاسبه کنند.

Refrences:

Chen, C.L., 2016. A systematic approach for solving the great circle track problems based on vector algebra. *Polish Maritime Research*, *23*(2), pp.3-13. https://doi.org/10.1515/pomr-2016-0014

Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., 2004. A novel approach to great circle sailings: the great circle equation. *The Journal of Navigation*, *57*(2), pp.311-320. https://doi.org/10.1017/S0373463304002644

Chen, C.L., Liu, P.F. and Gong, W.T., 2014. A simple approach to great circle sailing: The COFI method. *The Journal of Navigation*, *67*(3), pp.403-418. https://doi.org/10.1017/S0373463313000751

Cutler, T. J., 2004. *Dutton's Nautical Navigation*, Naval Institute Press Annapolis.

Green, R. M., 1985. Spherical astronomy, Cambridge University Press.

Hsieh, T.H., Wang, S., Liu, W. and Zhao, J., 2019. New Formulae for Combined Spherical Triangles. *The Journal of Navigation*, *72*(2), pp.503-512. https://doi.org/10.1017/S0373463318000772

Jofeh, M.L., 1981. The analysis of great-circle tracks. *The Journal of Navigation*, *34*(1), pp.148-149. https://doi.org/10.1017/S0373463300024322

KATZ, V. J. 2014. History of mathematics, Pearson New York.

Mohammadi, A., Zadeghabadi, A., Hoseini Arani, A. and Khazaei, A., 2021. Challenges of calculating the vortex point of the great circle in international seafarers training guidelines. *Journal of Research on Management of*

Teaching in Marine Sciences, *8*(4), pp.151-165. doi: 10.22034/rmt.2021.136612.1696

Murray, D. A. 1900. Spherical Trigonometry, for Colleges and Secondary Schools, Longmans, Green and Company.

Nastro, V. and Tancredi, U., 2010. Great circle navigation with vectorial methods. *The Journal of navigation*, *63*(3), pp.557-563. https://doi.org/10.1017/S0373463310000044.

Navy, R., 2008. The Admiralty Manual of Navigation: The Principles of Navigation. Nautical Institute.

Smart, W. M., and Green, R. 1977. Textbook on spherical astronomy, Cambridge University Press.

SNYDER, J. P. 1997. Flattening the earth: two thousand years of map projections, University of Chicago Press.

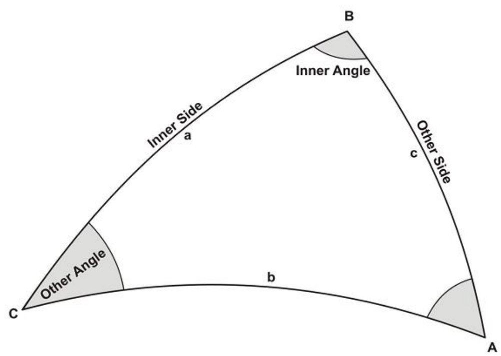
Snyder, J. P. and Voxland, P. M. 1989. An Album of Map Projections: US Geological Survey Professional Paper 1453, Department of the Interior.

Vis, M., 2018. History of the Mercator projection, Bachelor's thesis.

پیوست الف

۱. اثبات رابطه چهار قسمتی در مثلث کروی

فرمول چهار قسمتی رابطه‌ای است که از چهار عنصر زاویه و ضلع متوالی هر مثلث کروی (شکل آ-۱ را در زیر ببینید) را به هم ارتباط می دهد. ممکن است برای یافتن مسیر اولیه یا دوره نهایی مستقیماً از طول و عرض جغرافیایی بدون پیدا کردن فاصله دایره بزرگ استفاده شود.



شکل آ-۱. اجزای مثلث کروی در رابطه چهار قسمتی (دستورالعمل ناوبری دریاسالاری، ۲۰۰۸)

Fig. A-1- The components of a spherical triangle in a four-part relation (Admiralty Navigation Guide, (2008

رابطه چهار قسمتی به چهار جز ضلع و زاویه (دو ضلع و دو زاویه) متوالی را به‌صورت زیر (رابطه (آ-۱)) به هم ارتباط می دهد:

رابطه (آ-۱)

$$\cos(IS)\cos(IA) = \sin(IS)\cot(OS) - \sin(IA)\cot(OA)$$

این رابطه به‌صورت زیر قابل اثبات است. برای این کار ابتدا رابطه کسینوس‌ها را برای دو ضلع b و c به شرح زیر می‌نویسیم.

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

رابطه (آ-۲)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

رابطه (آ-۳)

$\cos b$ را از رابطه (آ-۲) در رابطه (آ-۳) جایگزین می‌کنیم:

$$\cos c = \cos a(\cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B) + \sin a\sin b\cos C$$

رابطه (آ-۴)

با اندکی عملیات ریاضی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\cos c = \cos c\,(1-\sin^2 a) + \sin a \cos a \sin c \cos B + \sin a \sin b \cos C$$

رابطه (آ-۵)

جمله $\cos c$ از طرفین رابطه بالا حذف می‌شود؛ و رابطه زیر باقی می‌ماند:

$$\sin^2 a \cos c = \cos a \sin a \sin c \cos B + \sin b \sin a \cos C$$

رابطه (آ-۶)

عبارت $\sin a$ در تمامی جملات معادله بالا وجود دارد لذا این جمله قابل حذف است و رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sin a \cos c = \cos a \sin c \cos B + \sin b \cos C$$

رابطه (آ-۶)

طرفین رابطه (آ-۶) را بر عبارت $\sin c$ تقسیم می‌کنیم؛ و عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\sin a \frac{\cos c}{\sin c} = \cos a \cos B + \frac{\sin b \cos C}{\sin c}$$

رابطه (آ-۷)

بر اساس رابطه سینوس‌ها در مثلث کروی رابطه زیر را داریم:

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \rightarrow \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

رابطه (آ-۸)

با جایگذاری رابطه (آ-۸) در رابطه (آ-۷) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sin a \frac{\cos c}{\sin c} = \cos a \cos B + \frac{\sin B \cos C}{\sin C}$$

رابطه (آ-۹)

با اندکی دستکاری در رابطه بالا رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$sina \cot c = cosa\ cosB + \sin B \cot C$$

رابطه (آ–۱۰)

جمله دوم سمت راست معادله (آ–۱۰) را به سمت دیگر منتقل می‌کنیم و در نهایت رابطه چهار قسمتی حاصل می‌شود:

$$cosa\ cosB = sina \cot c - \sin B \cot C$$

رابطه (آ–۱۱)

معادله (آ–۱۱) همان معادله (آ–۱) است که بر اساس مجاور بودن اضلاع و زوایا نوشته شده است.